數學科教師共備手冊

高中課程

單元 4
指數與對數

數學新世界

2018 年 12 月 編印

指數和對數

作者：CA、陳梅仙
版本： 20181224

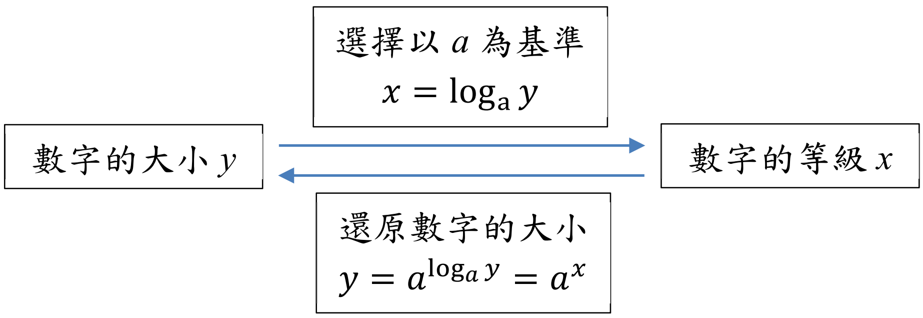
一、反思問題

15 世紀初，海上遠洋航運蓬勃發展，航海者只要參照星圖，便可計算經緯度來確定船隻的位置與航道方向，然而，在計算天體的運行軌道時，經常會遇到大量且繁雜的計算，如何簡化計算就成為當時天文學家迫切需要解決的問題，將乘除法簡化成加減法來計算的對數應運而生。在現代數學的教科書中，可以發現不管是內容的安排，或是對數定義的講解，通常都會置入指數的概念，讓人誤以為指數的發明是先於對數的。但從前述歷史的探討可以發現事實卻是相反，即從巴比倫古老的泥板中，也只是單單等比或等差的數列，絲毫沒有指數的概念。事實上發明對數的數學家 John Napier 約從 44 歲開始，共花了近 20 年的時間只研究對數，連基本指數的概念都未建立，即便如此，他的貢獻已足以名列數學史上重要的事蹟之一了。
參考：https://scitechvista.nat.gov.tw/c/sfn1.htm

1. 關於數字的大小的表現方式，從小學階段數字的長短和十進位制，國中階段利用指數律寫成科學記號，高中階段將科學記號前方的數字也寫成合併成指數的型態，並且底數的選擇不再限定為 10，甚至發展出以尤拉數 e 為底的自然對數。
   就近代而言，計算機已經取代人為的計算了，因此，將一個數字轉換為對數的形式其訴求應該不再侷限於計算上的便利性(當然，計算的簡易性還是很重要)，到底是什麼其他的需求下，我們會選擇用這種指數型態的數字表現方式？這跟選取不同的單位來表現一個數字的想法差異何在？貫穿這一連串在不同學習階段表現數字大小的核心想法是什麼呢？

2. 查表是直接獲得數值的簡便方式，那麼對於對數函數而言，我們要考慮哪個範圍來製作對數表就足供使用，為什麼？，請以 $\log x$ 當例子加以說明！

3. 課本是這樣教對數的：〝設 $a>0$，$a\neq 1$，對任一個正數 y，恰存在一個數 x，使$y=a^x$，x 稱為 y 以 a 為底的對數，x 記作$\log_a y$。〞也就是說，$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$，可是，這樣的說法好難懂，只看得到規則，看不到想法，您可以試著談出規則中的數學想法嗎？



4. 承第 3 題，為什麼要規定$y>0$, 以及 $a>0$，$a\neq 1$？為什麼會有這樣的規定？

5. 下面 3 個公式是對數運算的核心，怎麼把論證上的常態，轉換成認知上的自在，讓學生可以在使用時信手拈來呢？

設 $a>0$，$a\neq 1$，M 與 N 都是正數，r 是實數。

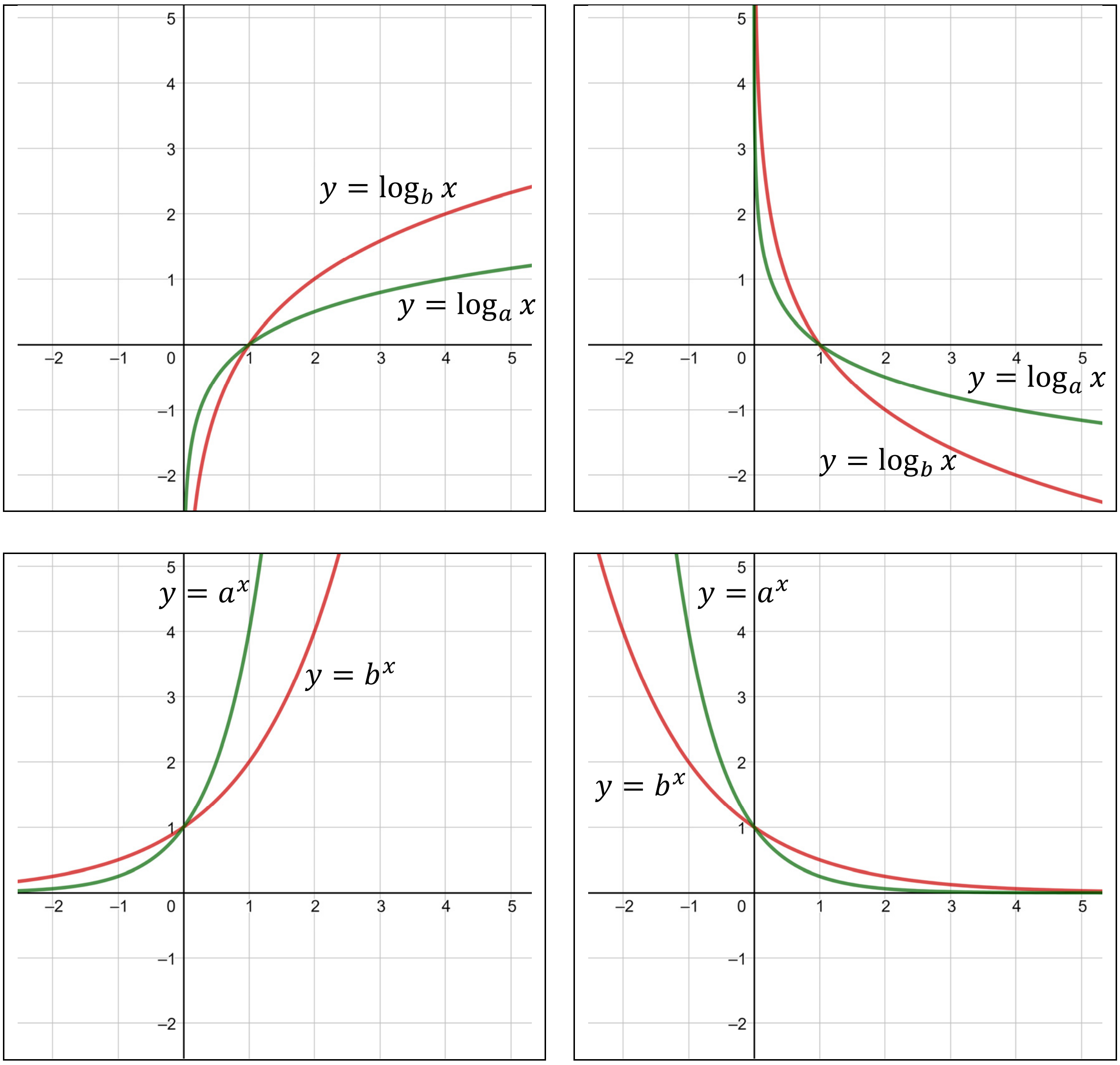
(1) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$。　(積的對數化成對數的和)

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$。　(商的對數化成對數的差)

(3) $\log_a M^r=r\cdot\log_a M$。　(乘方的對數化成對數的倍數)

6. 首先，談談在什麼情況之下，我們會將一數以 a 為底換成以 b 為底，當我們將換底公式 $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$ 改寫成 $\log_b x=\log_b a\times\log_a x$，這兩種表現方式在想法上有什麼不同？或是說，這兩種表現方式各自的意涵是什麼？

7. 您通常都是怎麼協助學生比較出下面函數圖形中 a 和 b 的大小和倍數關係呢？



8. 介紹對數的首數和尾數的目的是什麼？跟有效位數有關嗎？如果底數 $a, b,\ 0 < a < 1, 1 < b$，那麼，他們的尾數是在表現什麼？

9. 發展出以尤拉數 e 為底的自然對數的好處是什麼？

二、試著撰寫下面名詞的核心概念

1. 對數

2. 指數

3. 對數函數圖形

4. 指數函數圖形

5. 自然對數

6. 首數和尾數

7. 積化和差、和差化積

8. 換底公式

三、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
對數			
指數			
對數函數圖形			
指數函數圖形			
自然對數			
首數 尾數			
積化和差 和差化積			
換底公式			

四、觀摩、討論&修改

1.參考影片

(1) 數學新世界--CA--指對數 入班教學 20180721 (臺中市黎明國中) PART1-PART6

(2) 數學新世界--CA--指數與對數 20171229 (雲林縣維多利亞高級中學) PART1-PART2

(3) 數學新世界--CA--指對數函數 教師研習 20171110 (臺中市弘文中學) PART1-PART3

2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

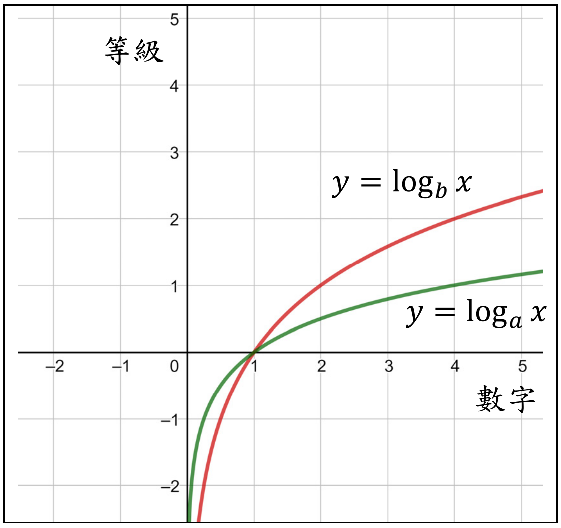
五、學習單：如附件。

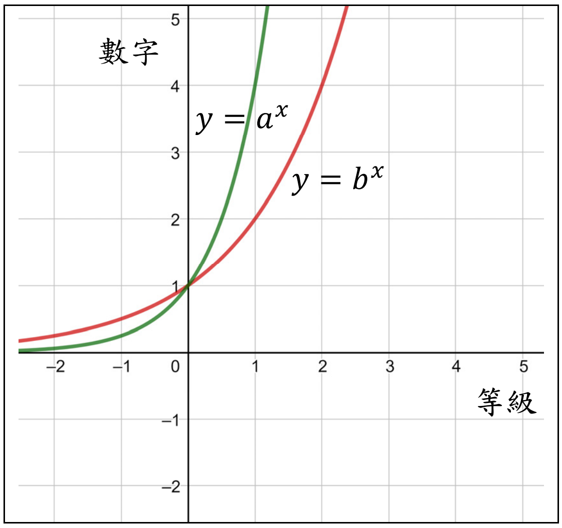
附

件

指數與對數

核心概念





_____年_____班_____號

姓名__________________

TSOYING SENIOR HIGH SCHOOL

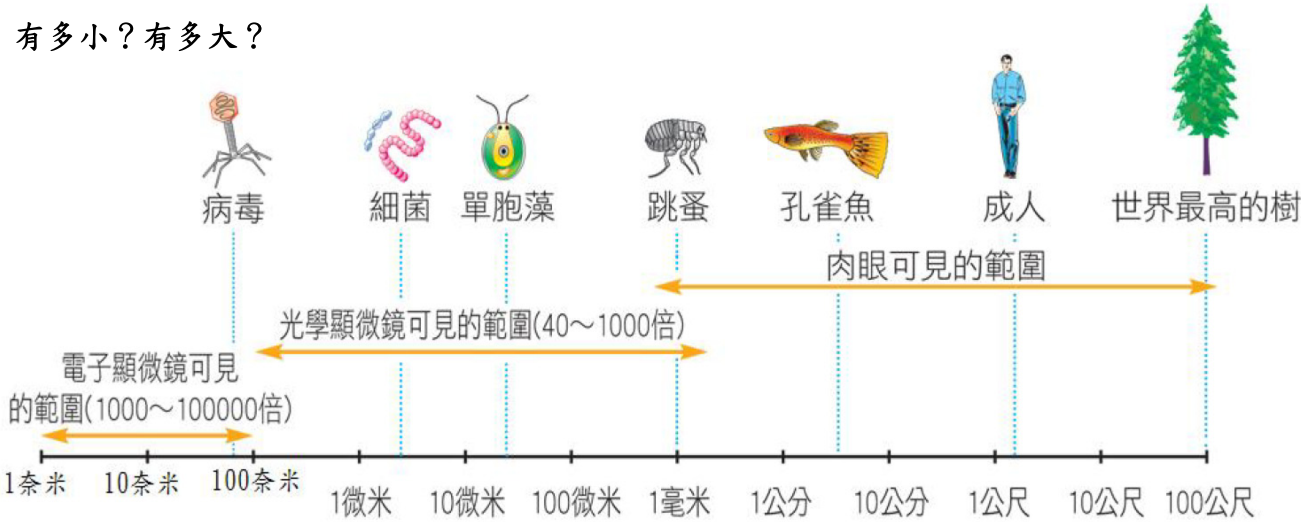
蔡晴穎

2018 年 12 月

目錄　（本學習單想法源自彰師大 CA 教授）

什麼時候談等級？

- **有多小？有多大？**



)

1nm（奈米）＝1/1000μm（微米）＝1/1000000mm（毫米）＝1/1000000000m（米）

10^2　10^3　10^4　10^5　10^6　10^7　10^8　10^9　10^{10}　10^{11}　10^{12}　米(m)

世界最高的樹　地球的直徑　地球到月球的距離　地球到太陽的距離

- **房屋：**　　好窄？　豪宅？　連連看。

1 萬　10 萬　100 萬　1000 萬　1 億　10 億

- **口袋裡的錢：**小學生？高中生？爸媽？郭董？連連看。

1　10　100　1000　10000　100000

- **電腦儲存容量單位：**你的硬碟是哪一個等級？

2^0　2^{10}　2^{20}　2^{30}　2^{40}　2^{50}　2^{60}　2^{70}　2^{80}　單位 Bytes

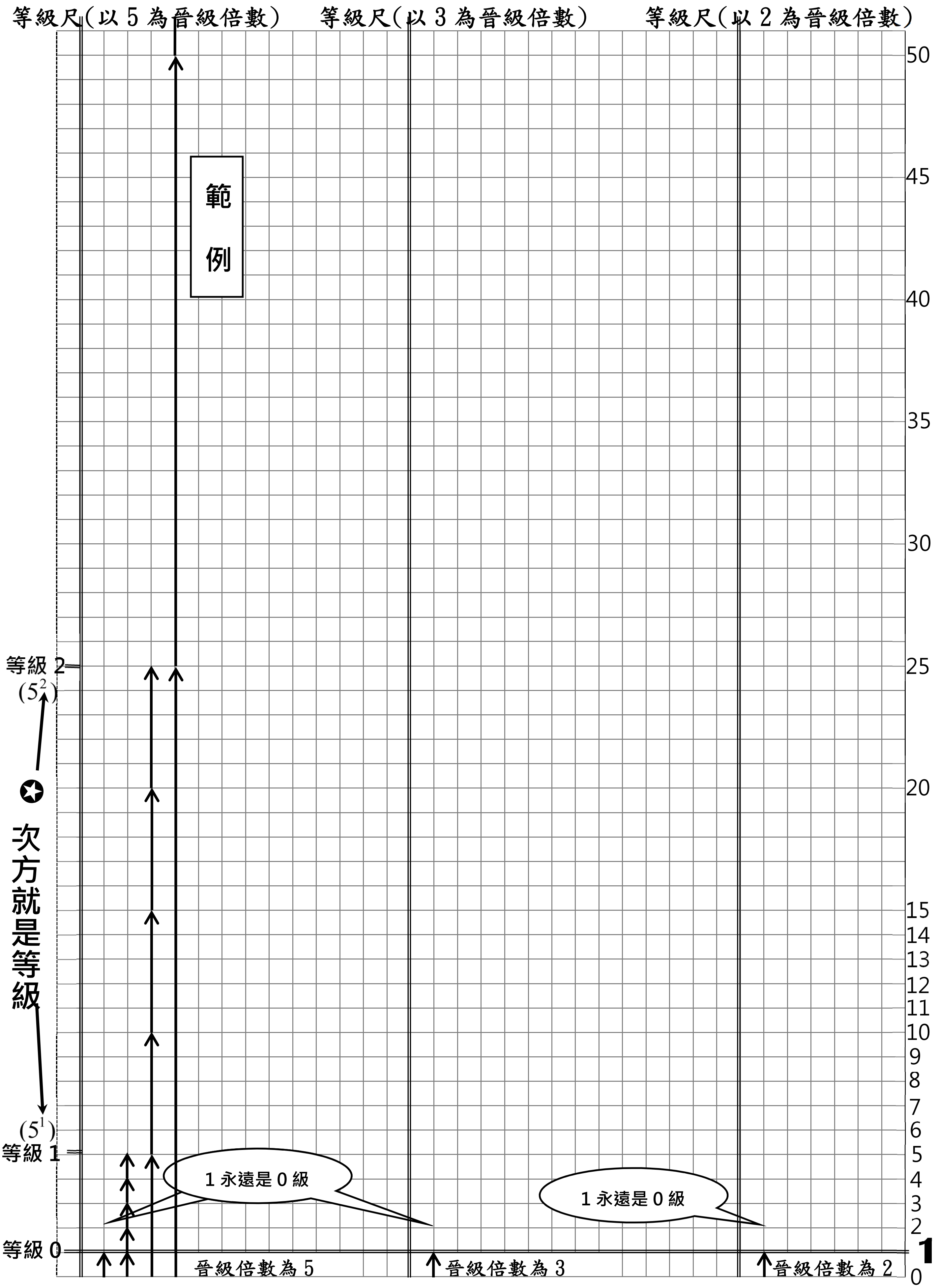
B　KB　MB　GB　TB　PB　EB　ZB　YB

- 常見的科學記號 $a\times k^b$：就是以等級的方式來記錄數字，$a\times10^3$ 是以 10 為晉級的倍數，等級在 10^3 的數字，$\times10$ 可以升級，$\times\frac{1}{10}$會降級。a 的數字如果太大就會升級，太小就會降級，a 應該要有什麼限制才能留在 10^3 這一個等級呢？______________________

- 阿銘應徵工作，老闆承諾『月起薪 100000，並且每年加薪 5%』。
  (1) 隔年，老闆給阿銘月薪應為________________ 。
  (2) 又隔一年(過了兩年)，老闆給阿銘月薪 100000+5000+5000，照這個邏輯的話每年增加的薪水一樣多，你覺得對嗎?__________
  (3) 此時阿銘幫自己爭取月薪應為 100000 +________+________
  (4) 若依老闆原本預計的給薪方法，過了 4 年，阿銘的月薪會是多少?
  請用數學計算式表示：100000 +___________ 。
  (5) 阿銘替自己爭取到的月薪，每年增加的薪水不一樣多，你覺得阿銘每年的薪水應該是前一年的幾倍才對?______________
  (6) 若依阿銘替自己爭取到的月薪計算方法，過了 4 年，阿銘的月薪會是多少?
  請用數學計算式表示：100000 X ___________ 。
  (7) 請說說老闆原本的給薪方法和阿銘認為合理的給薪方法，不同之處在哪裡?
  ____

- **本章節預計探討的內容➔**

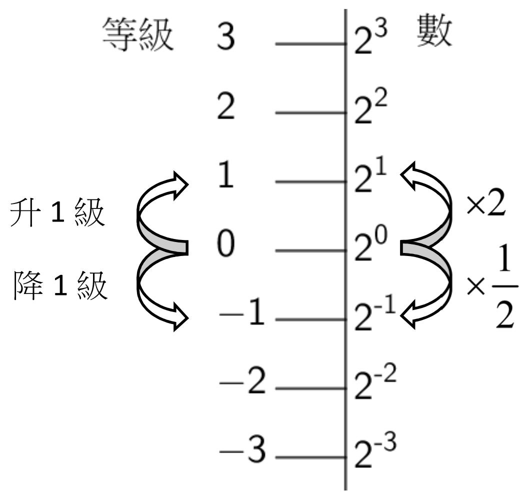
$\boxed{\text{對於固定倍數連乘這一類的運算}}$，以及$\boxed{\text{如何知道這種數的大小}}$



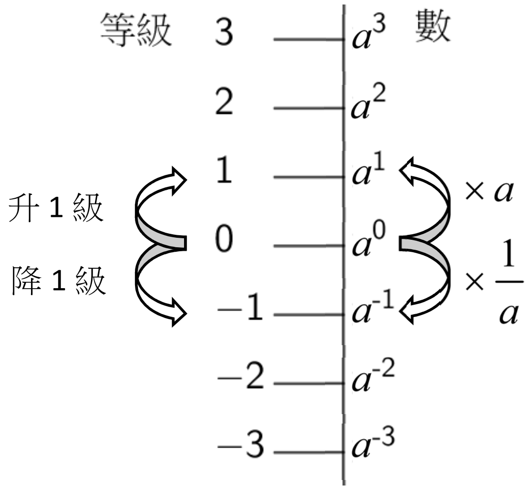
等級尺(以 5 為晉級倍數)
等級尺(以 3 為晉級倍數)
等級尺(以 2 為晉級倍數)
範例
等級 2
(5^2)
次方就是等級
(5^1)
等級 1
等級 0
1 永遠是 0 級
1 永遠是 0 級
晉級倍數為 5
晉級倍數為 3
晉級倍數為 2
50
45
40
35
30
25
20
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

指數律是： 先複習一下國中學到的～

以 2 為晉級倍數



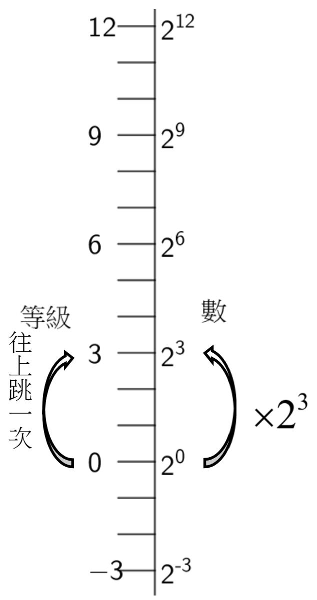
以 a 為晉級倍數



一次跳一級

	原本的數	2^2	2^2	2^2	2^2	2^2	2^2	2^2
	乘以	2^3	2^5			2^{-5}		
	升降級	+3						–4
	怎麼算	2^{2+3}			2^{2+10}		2^{2-7}	
	後來的數	2^5		2^9				

一次跳 m 級（以 $m=3$ 為例）

	從 2^0 開始，一次跳 2^3							
	升降級（跳幾次）	+2	+4			−5		
	變成	$(2^3)^2$			$(2^3)^5$		$(2^3)^{-3}$	
	怎麼算	$2^{3\times2}$						
	後來的數	2^6		2^9				2^{-21}

完備指數律

指數→$\boxed{\text{等級}}$

國中：→正整數→整數(正+負+0)
高中：→有理數(分數)→實數(有理數+無理數)

$$a^{x}$$

1. 指數律→等級如何計算：

   $a,b\in R$，$m,n\in Z$，則(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　(2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$　(3) $(a^m)^n=a^{mn}$　(4) $(ab)^n=a^nb^n$

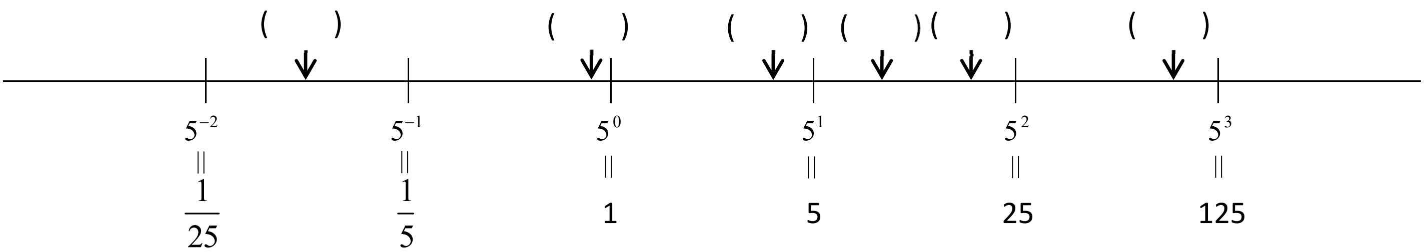
2. $\boxed{\text{零}}$指數的定義：$a\in R$，$a\neq 0$，$a^0=1$　。(<u>**1 永遠是 0 級**</u>)

3. $\boxed{\text{負}}$整數指數的定義：　$a\in R$，$a\neq 0$，$n\in N$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　。

4. 看等級時，不考慮底數為 1，因為沒變化時看等級無意義。

作業：講義
p.117~120

➢ 但指數一定要是整數嗎？如果不是，那它代表的數是多大？如果我們已經知道有 5^{-2} 、5^{-1} 、5^0 、5^1 、5^2 、5^3 ...這些數，那你覺得 $5^{1.8}$ 、$5^{2.8}$ 、$5^{1.2}$ 、$5^{-1.5}$ 、$5^{0.85}$ 、$5^{-0.1}$ 這些數大約應該要在哪個位置比較合理呢?請在試著下方括號中填入。



➢ 如果我們希望國中學的指數律(當指數為整數時)，在指數為$\boxed{\textbf{分數}}$(即**有理數**)時也成立，那麼我們該如何定義 $2^{\frac{1}{3}}$ 才適當？請說明。	● 依照左列推論，那 $2^{\frac{2}{3}}$ 應該代表什麼數？

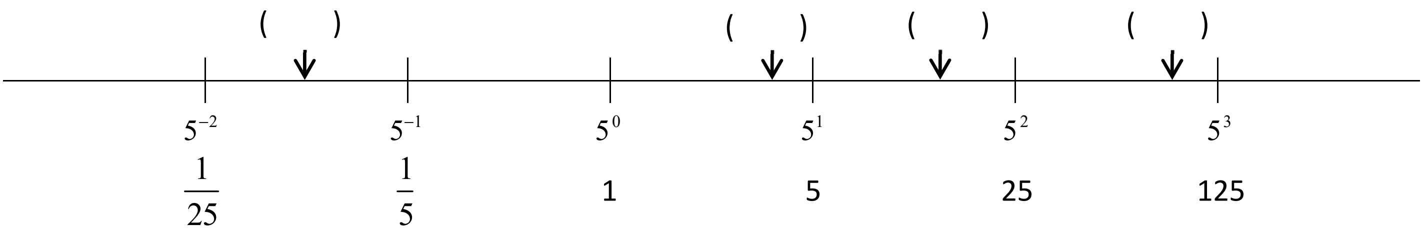
作業：講義
p.120~121

小結：

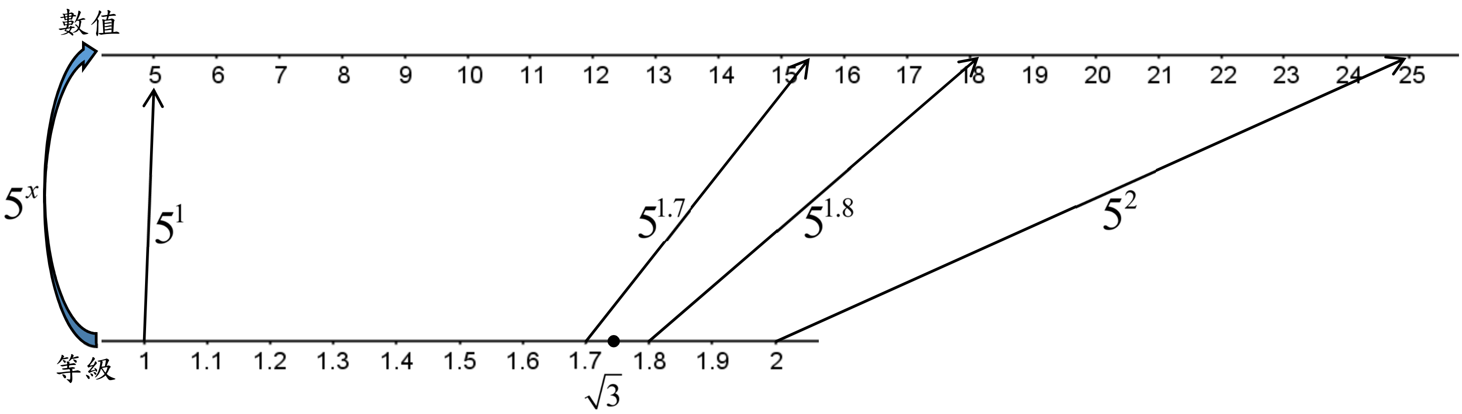
5. $\sqrt[n]{a}$ 的意義：$a,x\in R,\ n\in N$，若 $x^n=a$，則 $a>0$ 時，恰有一個正實數解記為 $\sqrt[n]{a}$ 。

6. $\boxed{\text{分數}}$指數的定義：設 $a\in R,\ a>0$，m、$n\in Z$，$n>0$，則(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　(2) $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

➢ 更進一步的，如果指數為$\boxed{\textbf{無理數}}$，你認為$5^{\sqrt{3}}$大約在哪個位置比較合理?請在試著下方適當的括號中填入$5^{\sqrt{3}}$。($\sqrt{3}\approx 1.732$)　　→我們相信有這個數！！



➢ 如何更精確的算出$5^{\sqrt{3}}$之值? ($\sqrt{3}\approx 1.732$)



至此，$\boxed{\text{對於所有的實數}}$而言，指數律已經完備，也就是說：

a、$b\in R$，$a>0$，$b>0$，$\boxed{\alpha、\beta\in \boldsymbol{R}}$，則

(1) $a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$　(2) $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$　(3) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$　(4) $(a\cdot b)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$

$\boxed{\text{練習}}$：

1. 試求下列各式之值：
   (1) $(5^{10}\cdot 5^{11}\div 5^{20})^3=$______。　(2) $(4^2)^3=2^n$，$n=$______。　*Ans*：(1)125　(2)12

2. 試求下列各式之值：(1)$5^{-2}=$______　(2)$1024^{0}=$______　(3)$(\frac{2}{3})^{-1}=$______　(4)$(-6)^{-3}=$______。

   Ans：(1)$\frac{1}{25}$　(2)1　(3)$\frac{3}{2}$　(3)$-\frac{1}{216}$

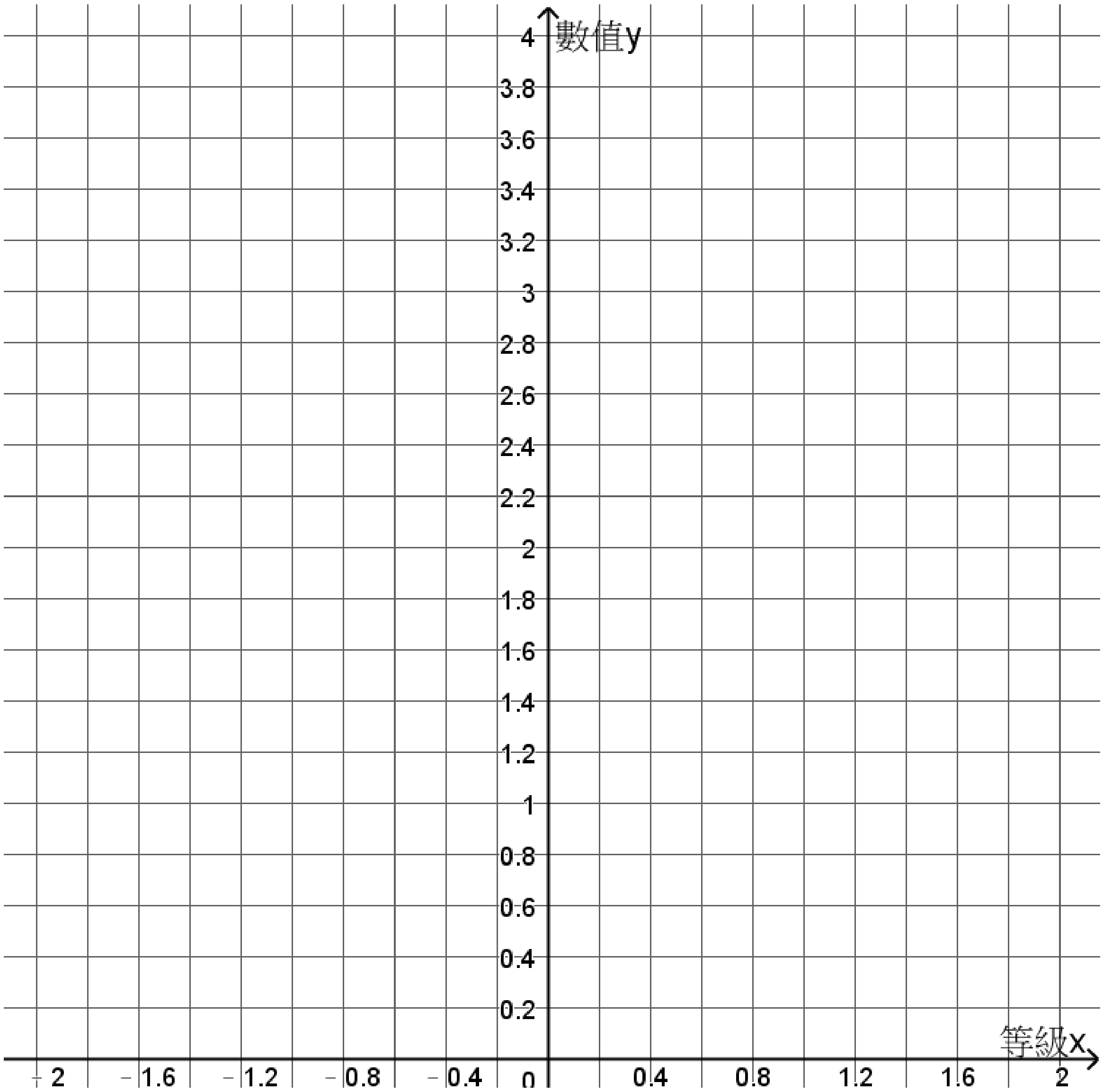
3. 試求下列各式之值：(1)$27^{\frac{1}{3}}=$______　(2)$25^{\frac{3}{2}}=$______　(3)$8^{-\frac{2}{3}}=$______　(4)$\sqrt[6]{4096}=$______。

4. ____________　$3^{10}+3^{15}$最接近下列哪一個數？(單選)(A)3^{10}　(B)　3^{15}　(C)　3^{16}　(D)　3^{25}　(E)$3^{\log_3 15}$

作業：講義
p.122

● 請完成下方表格，並利用表格提供的數據，畫出函數 $f(x)=2^x$ 及 $g(x)=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形。

x	-2	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
2^x	0.25	0.29	0.33	0.38	0.44	0.5	0.57	0.66	0.76	0.87	1	1.15	1.32	1.52	1.74	2	2.3	2.64	3.03	3.48	4
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$																					



(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{\square})^x=2^{\square}$

(2) 根據上方表格及兩個圖形，你發現了什麼特殊之處？（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

小結：

● $f(x)=2^x$ 與 $g(x)=2^{-x}$ 的圖形對稱於 y 軸。

作業：講義
p.129~130

對數函數 $f(x)=\log_a x$ 與圖形（找等級的函數） （建議搭配計算器）

- 在數學式子上，『談**等級**的函數』，我們用 log。
- $\log_a x$ 代表：『 x 』這個數在______這個晉級倍數下，所代表的**『等級』**。

例如：

如何說『 $\log_5 x = 3.2$ 』➔ x 這個數在以____為晉級倍數底下時，它的等級是_______ 。

如何形容『 $5^{3.2}$ 』這個數➔以____為晉級倍數時，等級是_______的數。

練習：

(1) 8 這個數在以 2 為晉級倍數底下時，它的等級是_______，所以 $\log_2 8 =$ ______ ，

(2) ______這個數在以____為晉級倍數底下時，它的等級是_______，所以 $\log_3 81 =$ ______ ，

(3) ______這個數在以____為晉級倍數底下時，它的等級是_______，所以 $\log_{10} 10000 =$ ______

(4) ______這個數在以____為晉級倍數底下時，它的等級是_______，所以 $\log_{0.1} 0.001 =$ ______ ，

(5) $\because 2^{\square} = \boxed{} \Rightarrow \log_2 4$ =______　　(6) $\because$ 　　= 　　$\Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} 25$ =______

(7) $\because$ 　　= 　　$\Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 9$ =______　　(8) $\because$ 　　= 　　$\Rightarrow \log_8 \frac{1}{2}$ =______

(9) $\because$ 　　= 　　$\Rightarrow \log_5 1$ =______　　(10) $\because$ 　　= 　　$\Rightarrow \log_7 7$ =______ 。

作業：講義
p.146~147

- 把對數寫好：
- $f(x)=\log_a x$

真數

底數(底數為 10 時常省略不寫)

例如：$f(x) = \log_2 64$

- 你覺得(底數)晉級倍數可以是 1 嗎？________ 如果晉級倍數是 1，那等級有意義嗎？________
為什麼？

數學 murmur：
看等級不需要考慮負數，由於|負|=正，所以如果我們要看等級大小，看正的就好。

試寫出**底數 a 的範圍**：________________________

- 「真數」指的是「想看它等級的數」，對我們來說，看正的就夠了。因此，
試寫出**真數 x 的範圍**：________________________
- 試判斷下列對數，哪些<u>沒有</u>意義？____________

(A) $\log_3 1$　(B) $\log_1 3$　(C) $\log_2 3$　(D) $\log_2(-3)$　(E) $\log_{-2} 3$　(F) $\log_2 \sqrt{5}$　(G) $\log_{\sqrt{5}} 2$　(H) $\log_2 0$

小結：
- 底數 a 的範圍：$a>0, a\neq 1$
- 真數 x 的範圍：$x>0$

說出精確的等級

$\log_2 32$	$\log_{10} 1$
$\log_2 \frac{1}{32}$	$\log_{10} 10$
$\log_2 128$	$\log_{10} 100$
$\log_2 \frac{1}{128}$	$\log_{10} \frac{1}{10}$
$\log_2 1024$	$\log_{10} 10^{-5}$
$\log_2 \frac{1}{1024}$	$\log_{10} 0.01$
$\log_2 \sqrt{2}$	$\log_{10} \sqrt{10}$
$\log_2 \sqrt[3]{2}$	$\log_7 7$
$\log_2 2^{\frac{2}{3}}$	$\log_{\frac{1}{125}} 5$
$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_{27} 3$
$\log_{0.2} 0.008$	$\log_{27} 9$
$\log_{\sqrt{5}} 5$	$\log_5 \sqrt{5}$
$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$	$\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}$

練習>>>>換成等級

請沿所有實線割開

說出大約的等級 □. ~~~

$\log_2 10$	$\log_{10} 8$
$\log_2 88$	$\log_{10} 878$
$\log_2 878$	$\log_{10} 9487$
$\log_5 50$	$\log_{10} 10^{6.5}$
$\log_5 500$	$\log 131$
$\log_3 50$	$\log 0.131$
$\log_3 100$	$\log 0.0033$
$\log_{0.3} 0.1$	$\log 5.1\times10^{-5}$
$\log_{0.3} 0.01$	$\log 5.1\times10^{-99}$
$\log_2 3$	$\log_3 2$
$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$	$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$
$\log \sqrt{50}$	$\log_1 10$
$\log_{0.2} -0.007$	$\log_{-5} \sqrt{5}$

請寫上前頁相對應的數值

請塗上膠水

請塗上膠水

請寫上前頁相對應的數值

請塗上膠水

練習：

- **比較 $\log_2 11$ 與 3.5 兩個數，哪一個比較大？**

$\begin{cases} \log_2 11 \text{介於} \_\_\_\_\_\_ \text{與} \_\_\_\_\_\_ \text{兩整數之間} \\ 3.5 \text{介於} \_\_\_\_\_\_ \text{與} \_\_\_\_\_\_ \text{兩整數之間} \end{cases} \Rightarrow$ 不夠細

換個想法…換成同樣的晉級倍數來思考：

$\log_2 11$ ➔_____這個數在以____為晉級倍數底下時的等級

3.5 ➔在以 2 為晉級倍數底下時的等級為 3.5 的是哪一個數呢?

➔ $3.5 = \log_2 ?$

➔ $? = 2^{3.5} = 2^{\frac{\square}{\square}} = \sqrt{2^{\square}} = \sqrt{\quad\quad}$

$\therefore 11 = \sqrt{\quad\quad} < \sqrt{\quad\quad} = 2^{3.5}$

$\therefore \log_2 11 < \log_2 \sqrt{\quad\quad} = 3.5$

- **仿上題，比較 $\log_3 15$ 與 2.5 兩個數，哪一個比較大？**

- pH 值是衡量酸鹼性的直接尺度，其範圍介通常於 $pH = 0$ 到 $pH = 14$ 之間，化學上以 pH 值來表示水溶液的酸鹼性，以氫離子莫耳濃度 $\left[H^+\right]$ 來標定，公式為 $pH\text{值} = -\log\left[H^+\right]$。已知一水溶液其氫離子濃度為 9×10^{-10}，且 $\log 3 \approx 0.4771$，試求其 pH 值____________。

等級分成兩種☞☞☞

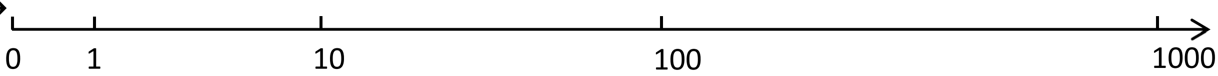
種類一：**越大等級越高**　　　　（由於空間不足，所以此 scale↓未按照比例畫）

■晉級倍數➔ 10　　　**(晉級：等級加 1，降級：等級減 1)**

②畫等級尺

①寫上等級→

數的大小

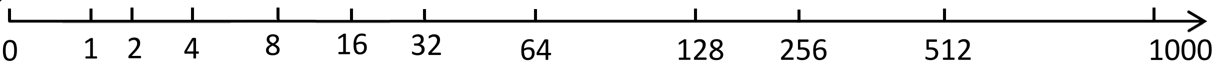


■晉級倍數➔ 2

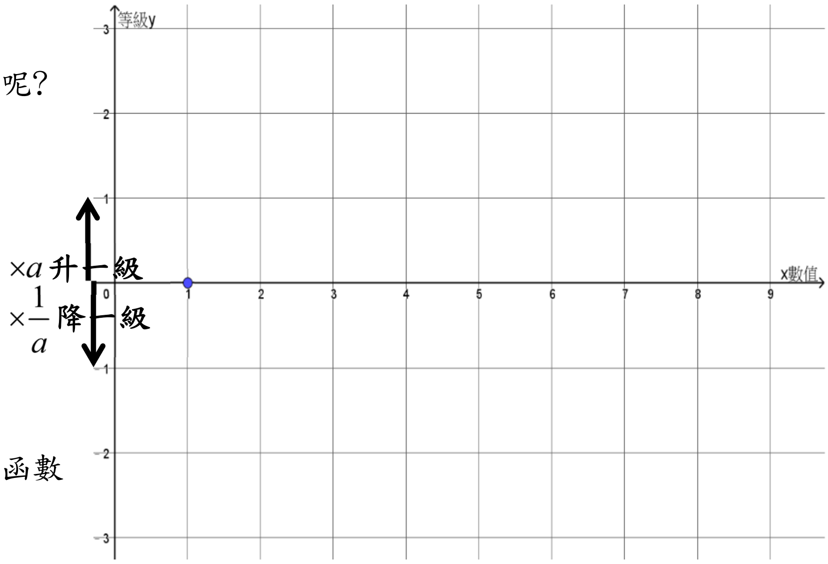
②畫等級尺

①寫上等級→

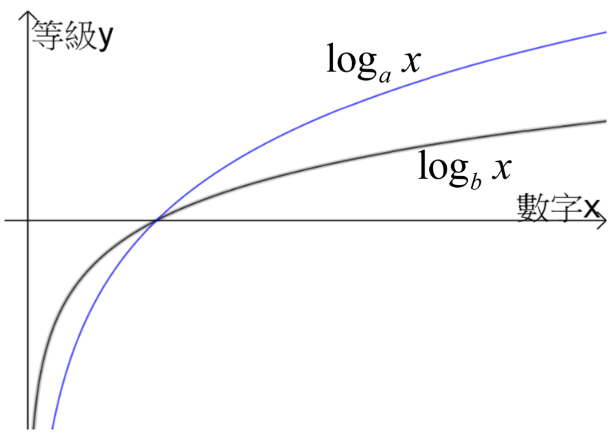
數的大小



- 為什麼這兩個都是『越大等級越高』呢?
- 生活中有哪些符合『越大等級越高』的事呢?
- 以上兩種晉級倍數，哪一種比較容易晉級?
- 請試著在右方的坐標中畫出上面兩個函數的圖形。



- 在右方你畫出的圖形旁寫上該函數：



- 觀察左圖，你覺得哪一個比較容易晉級？______
- a 與 b 兩個晉級倍數哪一個比較大？________　，你如何得知？________________________
- 等級為______時的那個數，即為晉級倍數。
- 左圖中的晉級倍數 a、b 是比 1 大還是比 1 小的數？___________，你如何得知？_________________

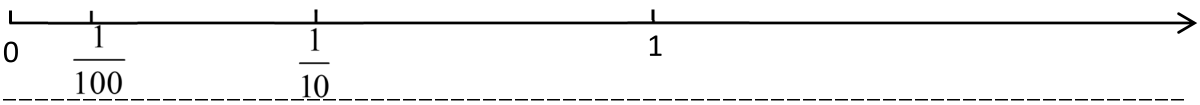
種類二：**越小等級越高** （由於空間不足，所以此 scale↓未按照比例畫）

■**晉級倍數➔** $\frac{1}{10}$ **(晉級：等級加 1，降級：等級減 1)**

②畫等級尺

①寫上等級➔

數的大小

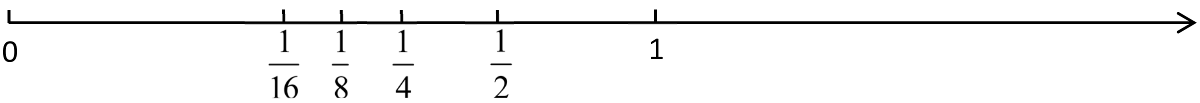


■**晉級倍數➔** $\frac{1}{2}$

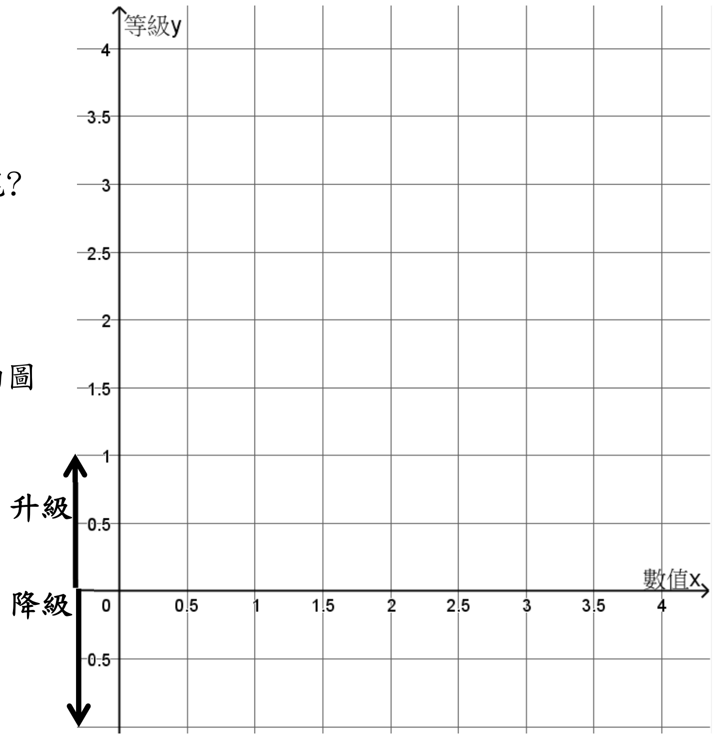
②畫等級尺

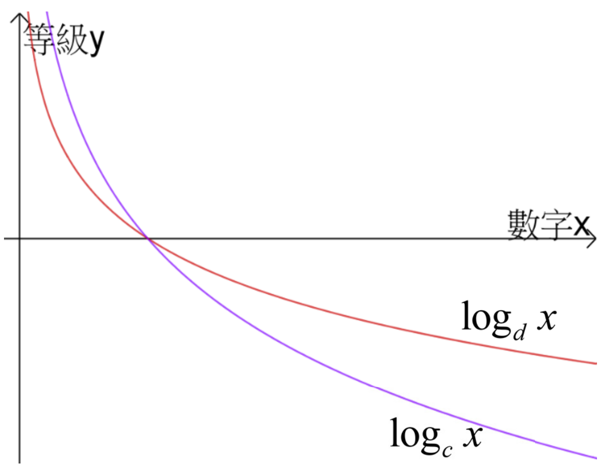
①寫上等級➔

數的大小



- 為什麼這兩個都是『越小等級越高』呢?
- 生活中有哪些符合『越小等級越高』的事呢?
- 以上兩種晉級倍數，哪一種比較容易晉級?
- 請試著在右方的坐標中畫出上面兩個函數的圖形。
- 請在你畫出的圖形旁寫上該函數。

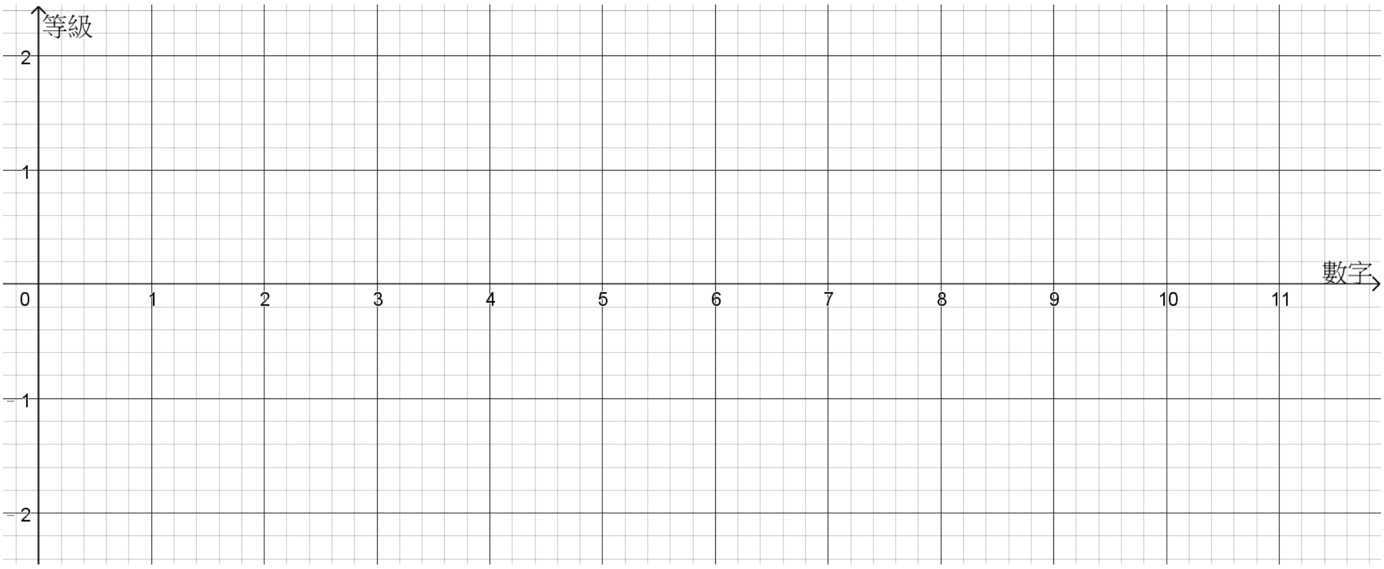




- 觀察左圖，你覺得哪一個比較容易晉級？______
- c 與 d 兩個晉級倍數哪一個比較大？c____d 你如何得知？______________________
- 等級為______時的那個數，即為晉級倍數。
- 左圖中的晉級倍數 c、d 是比 1 大還是比 1 小的數？_______
  你如何得知？______________________

從圖形找到晉級倍數

- 請試著畫出數字分別以晉級倍數 3、2、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$ 所對應的等級指標(次方)的圖形。並在圖形旁邊寫出其所對應的函數。



- 函數 $f(x)=\log_a x$ 的晉級倍數為_______。

  寫成指數形態⇒ ____________

  函數值(等級)為 1 時，$x=$？

  也就是說，當能讓等級為______的 x ，即為它的晉級倍數。

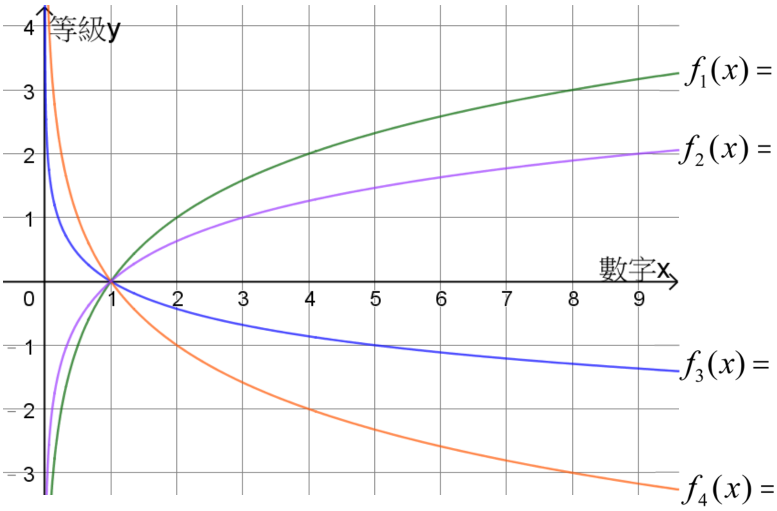
- 請找出下面 4 個等級函數圖形的"晉級倍數"，並在圖形旁寫下其函數。

  你是如何判別的?

  ____

  當晉級倍數(底數)小於 1 時，你是如何判別的?

  ____



練習：

1. $512 = 2^{\square}$，$500 = 2^{\square}$，$49 = 7^{\square}$，$50 = 7^{\square}$

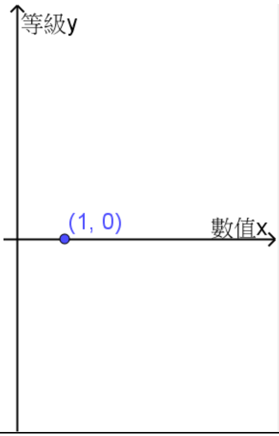
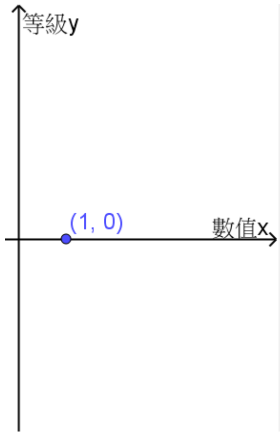
2. 請寫出 500 在以下各晉級倍數中的『等級』

(1) 以 2 為晉級倍數時，$500 = 2^{\square}$，□介於______與______兩整數之間。

(2) 以 5 為晉級倍數時，$500 = 5^{\square}$，□介於______與______兩整數之間。

(3) 以 10 為晉級倍數時，$500 = 10^{\square}$，□介於______與______兩整數之間。

(4) 以 $\frac{1}{2}$ 為晉級倍數時，$500 = (\frac{1}{2})^{\square}$，□介於______與______兩整數之間。

數越大等級越高， 表示晉級倍數_____1 (填 >，=，<)， 圖形會像➔ 	數越小等級越高， 表示晉級倍數_____1 (填 >，=，<)， 圖形會像➔ 

3. x 在以 a 為晉級倍數時的等級為______________
x 在以 b 為晉級倍數時的等級為______________
x 在以 c 為晉級倍數時的等級為______________

所以，$x = a^{\square} = b^{\square} = c^{\square}$

4. 觀察前幾頁的學習單，
當晉級倍數**比 1 大**時，晉級倍數越______越不容易晉級。(填大或小)
當晉級倍數**比 1 小**時，晉級倍數越______越不容易晉級。(填大或小)

作業：講義
p.158~160

對數的運算其實就是指數律：（永遠要記得，對數 log 之值代表等級）

想想看…並回答下列問題：

- $\log_a 1 =$ ______ ； $\log_a a =$ ______

- $a^{\log_a b} =$ ______

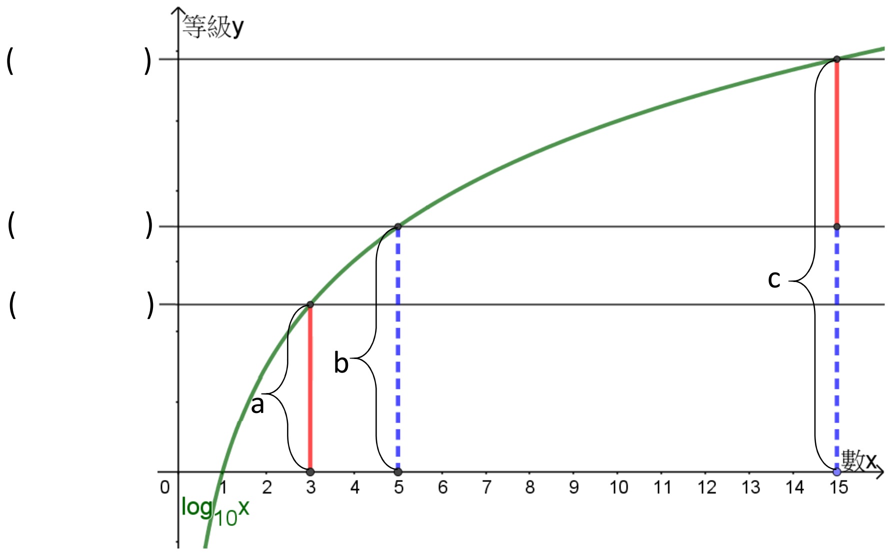
- 想法： $\log 3 + \log 5 = \log ?$
  也就是說，在晉級倍數為 10 時，3 的**等級**＋5 的**等級**＝哪一個數的**等級**？

兩個**等級**相加，其實就是**兩個「次方」相加**… 因此，讓我們回到指數來思考…… $10^{\log 3+\log 5}$ $=10^{\log 3}\times 10^{\log 5}$ $=3\times 5$ $\Rightarrow$ $=15$ $=10^{\log 15}$	仿左，試論： $\log_a r + \log_a s = \log_a rs$ **兩個數相乘➔等級相加**

從函數圖形看對數運算規則：

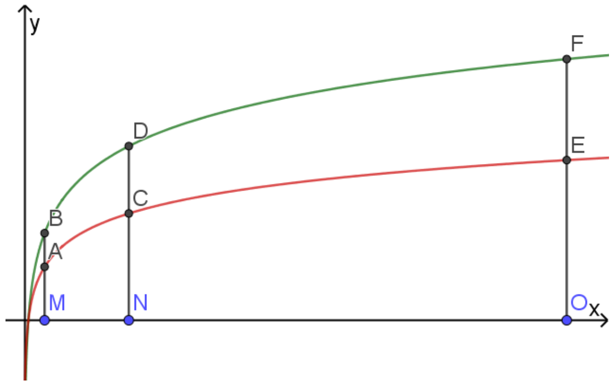
➢ 請在括弧中填入適當數值，並試著從右圖觀察上列等式。

➢ 右圖中 a,b,c 之間的關係為何? ____________



可以這樣用…

問題：右圖為兩函數 $f(x)=\log_3 x$ 與 $g(x)=\log_6 x$ 的圖形，試回答下列問題：



(1) 若 M、N 兩點坐標為 $M(\sqrt{27},0)$ 、 $N(27,0)$，且 $\overline{MA}+\overline{NC}=\overline{OE}$ ，則 O 點標為(______ ，0)。 (請將答案化到最簡)

(2) 承上，是否 $\overline{MB}+\overline{ND}=\overline{OF}$?______

● 想法：$\log_3 24-\log_3 8=$？

也就是說，在晉級倍數為 3 時，24 的**等級**－8 的**等級**＝哪一個數的**等級**？

兩個**等級**相減，其實就是<u>**兩個「次方」相減**</u>… 因此，讓我們<u>回到指數</u>來思考…… $3^{\log_3 24-\log_3 8}$ $\Rightarrow$ $=$	仿左，試論：$\log_a r-\log_a s=\log_a \frac{r}{s}$ **兩個數相除➔等級相減**

請同樣利用上頁的圖形解釋這樣的性質。

公式怎麼用？　$\log_3 54 + \log_3 6 - \log_3 4 =$__________

● 想法：

$3\log_5 8=$？➔

在晉級倍數為 5 時，當 8 的等級變為原來的 3 倍時，其實是對 8 做『　　　　　』

$\frac{1}{2}\log_5 8=$？➔

在晉級倍數為 5 時，當 8 的等級變為原來的一半時，其實是對 8 做『　　　　　』

<u>回到指數</u>思考…… $5^{3\log_5 8}=(5\quad\quad)^3$ $=\boxed{\quad}^3$ $=5^{\log_5 \boxed{\quad}}$ $5^{\frac{1}{2}\log_5 8}=(5\quad\quad)^{\frac{1}{2}}$ $=\boxed{\quad}^{\frac{1}{2}}$ $=5^{\log_5 \boxed{\quad}}$	仿左，試論：$\log_a r^t=t\log_a r$

公式怎麼用？ (1) $\log_7 343=$________　(2) $\log_6 \frac{1}{216}=$__________

- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (why?)

<table>
<tr>
<td>

回到指數思考……

$\log_2 8 = 3$ $\log_8 2 = \dfrac{1}{3}$

$8 = 2^3 \Rightarrow 8^{\frac{1}{3}} = 2$

</td>
<td>

仿左，試論：$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$\log_a b = x$ $\log_b a =$

$= \quad \Rightarrow \quad =$

</td>
</tr>
</table>

- 試利用 $\log_a r^t = t\log_a r$ 、 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ 這兩個公式，說明 $\log_{a^s} r^t = \dfrac{t}{s}\log_a r$

$\boxed{\text{公式怎麼用？}}$ $\log_{0.1}100 =$ ________

【大考試題賞析】

- 若正實數 x, y 滿足 $\log_{10} x = 2.8$，$\log_{10} y = 5.6$，則 $\log_{10}(x^2 + y)$ 最接近下列哪一個選項的值？

  (1) 2.8 (2) 5.6 (3) 5.9 (4) 8.4 (5) 11.2。 【101 學科能力測驗】

- 請問下列哪一個選項等於 $\log\left(2^{\left(3^5\right)}\right)$？

  (1) $5\log(2^3)$ (2) $3\times5\log2$ (3) $5\log2\times\log3$ (4) $5(\log2+\log3)$ (5) $3^5\log2$。

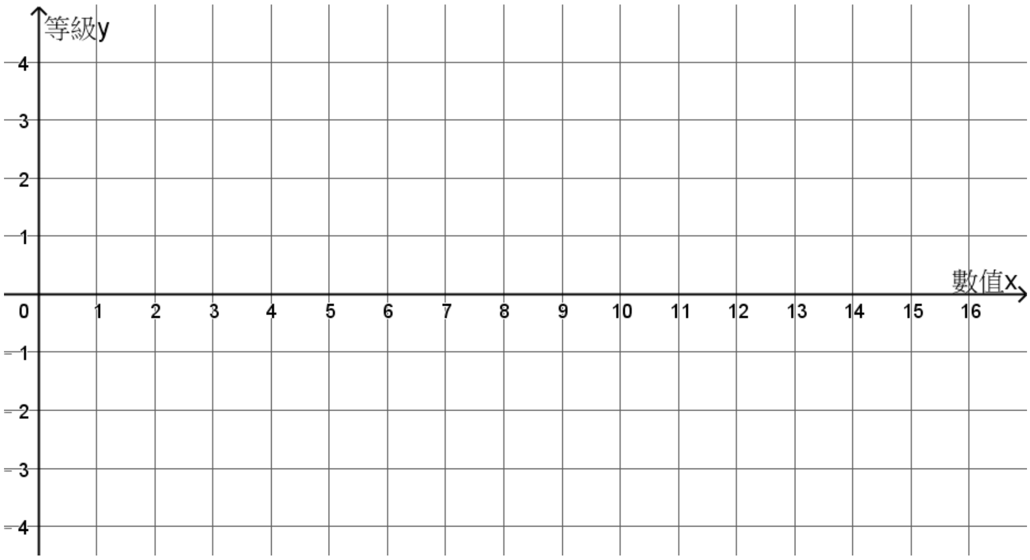
  【103 學科能力測驗】

作業：講義

p.148~149

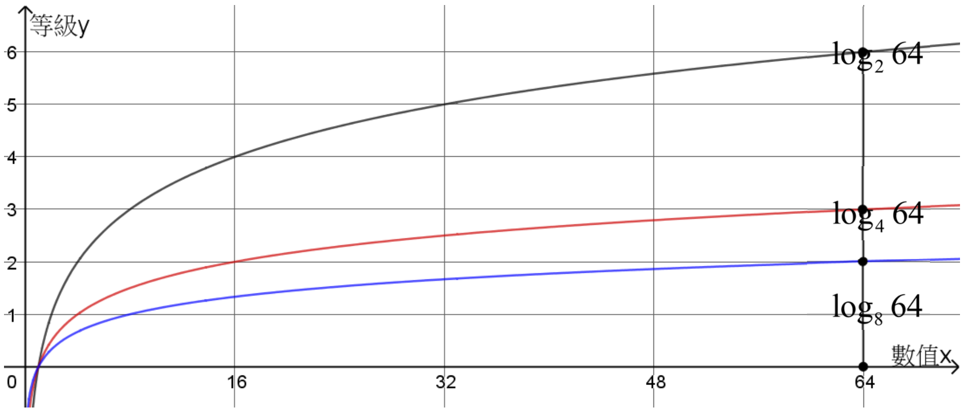
主題：換底公式

- 請在下方坐標中畫出$\log_2 x$ 、 $\log_4 x$與$\log_8 x$的圖。



  - 哪一個的晉級能力最好？_________
  - $\log_4 4=1$，那麼$\log_2 4=$_____ ；$\log_8 8=1$，那麼$\log_2 8=$_____
  - $2^2=4^1$ ，所以底為 4 的晉級能力是底為 2 的________倍。
  - $2^3=8^1$，所以底為 8 的晉級能力是底為 2 的________倍。

- 想想看，怎麼換的？



乘_______倍

乘_______倍

任意底的置換：

- 針對 540 這個數的等級，如果想把晉級倍數由 7 改為 2……

$$2^{\boxed{}}=540=7^{\boxed{}}=(2^{\boxed{}})^{\boxed{}}=2^{\boxed{}\times\boxed{}}$$

- 仿上討論，針對 1000 這個數的等級，如果想把晉級倍數由 7 改為 2……

- 仿上討論，針對 x 這個數的等級，如果想把晉級倍數由 7 改為 2……

所以，將晉級倍數由 7 改為 2 的倍率為______________

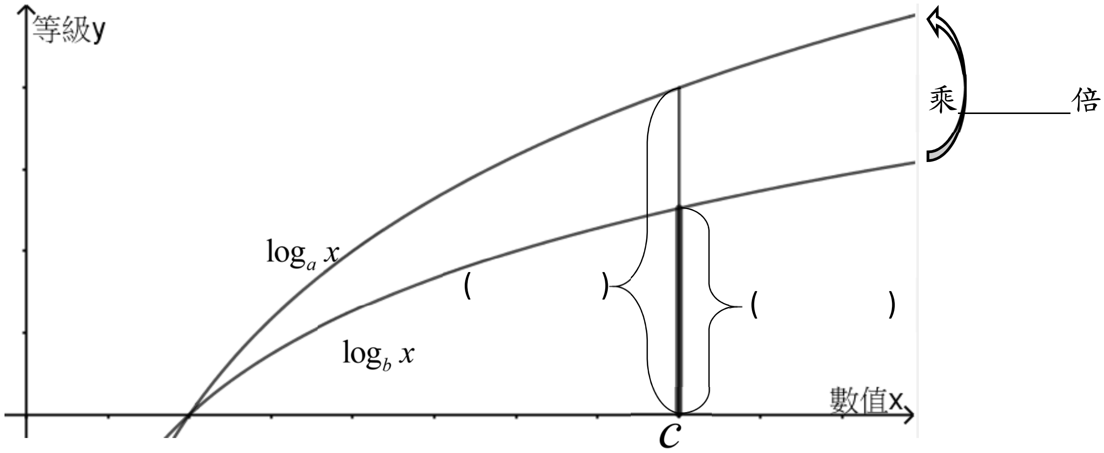
- **仿上討論，針對 c 這個數的等級，如果想把晉級倍數由 b 改為 a……所以**

小結：將晉級倍數由 b 改為 a 的倍率為____________

可以這樣用…

有一手機計算軟體上面有兩個按鈕，每按一次$\boxed{5}$，會將原有的數值乘 5 倍，每按一次$\boxed{7}$，會將原有的數值乘 7 倍。某甲對一數 x 連續按了 21 次$\boxed{7}$得到一數 a，某乙欲對 x 連續按$\boxed{5}$，希望得到最接近 a 的值，那麼乙大約要按幾次按鈕$\boxed{5}$？(已知 $\log_5 21\approx 1.89$，$\log_{21} 5\approx 0.53$，$\log_5 7\approx 1.2$，$\log_7 5\approx 0.83$，$\log_{21} 7\approx 0.64$，$\log_7 21\approx 1.56$)。答案請取最接近的整數。_________

從函數圖形看換底公式



<u>**★在兩個不同的晉級倍數 a、b 中，不論 c 是什麼數，都有著相同的等級換算倍率。**</u>

$\boxed{\text{小結}}$：　$\Rightarrow (\log_a b)(\log_b c)=\log_a c$（連鎖律）　$\Rightarrow \log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$（換底公式）

$\boxed{\text{公式怎麼用？}}$已知 $\log 2=a$ ，$\log 3=b$ ，求 $\log_2 3=$____________

延伸：由以上結論可推知：$\Rightarrow (\log_a b)(\log_b c)(\log_c d)(\log_d e)=\log_a e$

$\boxed{\text{公式怎麼用？}}$化簡 $\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 7\times\log_7 32=$______ 。

作業：講義

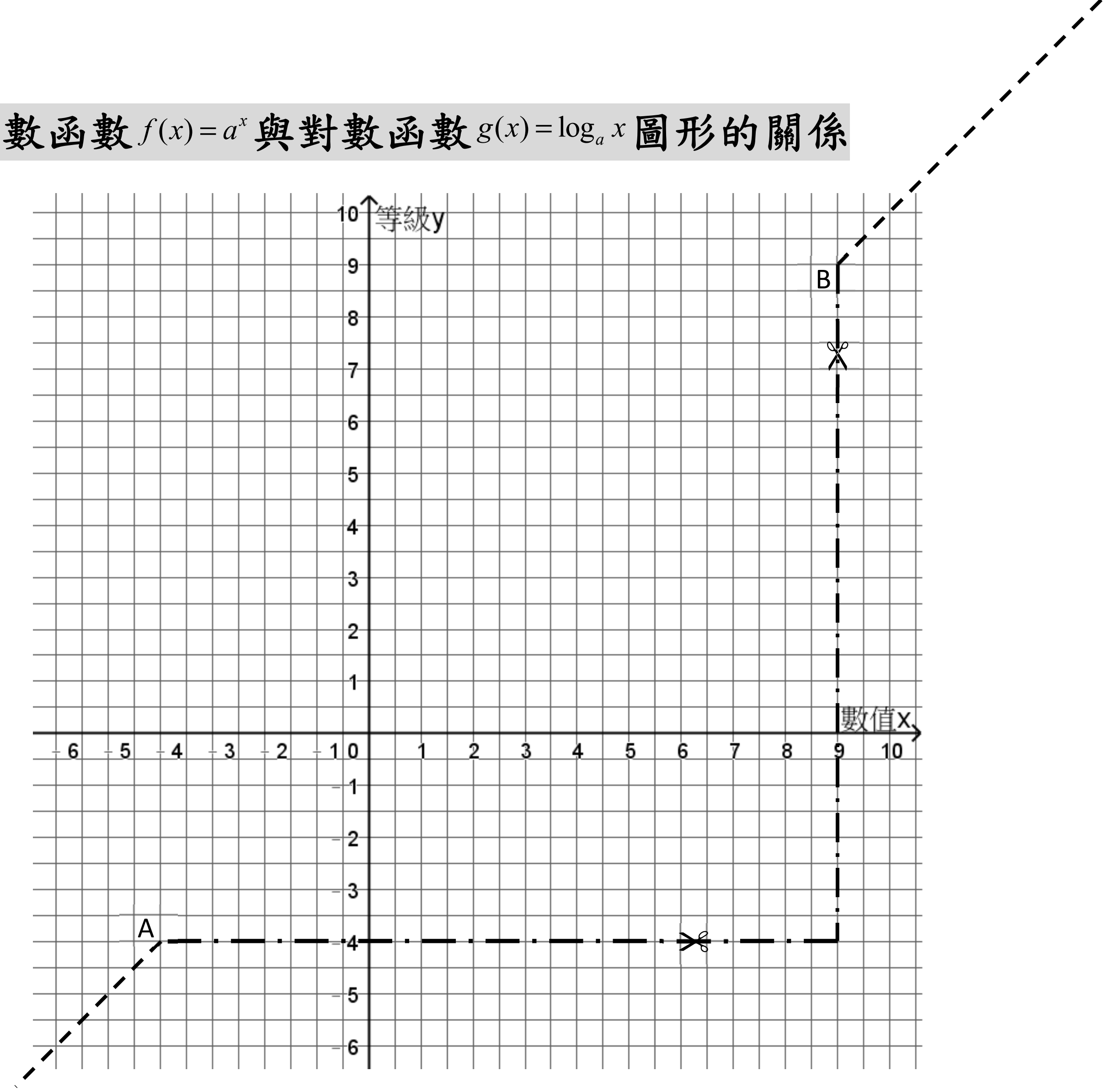
p.150~151

配合下頁學習單，請留空。

重點統整：

- $\log_a 1 = 0$ ； $\log_a a = 1$
- $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$　　兩個數相乘➔等級相加
- $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$　　兩個數相除➔等級相減
- $\log_a r^t = t\log_a r$ 、 $\log_{a^s} r^t = \frac{t}{s}\log_a r$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\Rightarrow (\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$ （連鎖律） $\Rightarrow \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$（換底公式）

指數函數 $f(x)=a^x$ 與對數函數 $g(x)=\log_a x$ 圖形的關係



- **操作步驟**：

1. 請先在上方坐標中分別以不同的顏色畫出：

   ①以 2 為底的對數函數 $f(x)=\log_2 x$ 的圖形，並在圖形旁寫上函數。

   ②以 $\frac{1}{2}$ 為底的對數函數 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形，並在圖形旁寫上函數。

   畫好後請「用力」將**曲線**及**兩坐標軸**顏色加深加粗。
2. 翻到背頁，沿著方才畫出的兩條**曲線**及**兩坐標軸**軌跡，在背頁描繪出來，並在背頁坐標軸相對應位置亦寫上原坐標軸之『等級』及『數值』字樣。
3. 請沿著 · — · — 直線切開。並沿著 - - - - 線往內翻摺(谷線)，沒畫 - - - - 線的地方不要摺到。

   觀察：這個步驟，我們是否把 x 軸(input)與 y 軸(output)對調了？________
4. 連接 $\overleftrightarrow{AB}$ 並寫出其直線方程式______________。以 $\overline{AB}$ 為谷線將其往上摺。
5. 觀察：你覺得翻摺後的兩個曲線，是哪兩個函數的圖形呢？__________、__________
6. 請在本頁坐標上描出對調後的圖形，並在圖形旁寫上函數。
7. 觀察：後來的圖形與原圖形對稱於直線__________(對稱軸)。

8. 函數做的事

$$f(x)=y$$

輸入 input

輸出 output

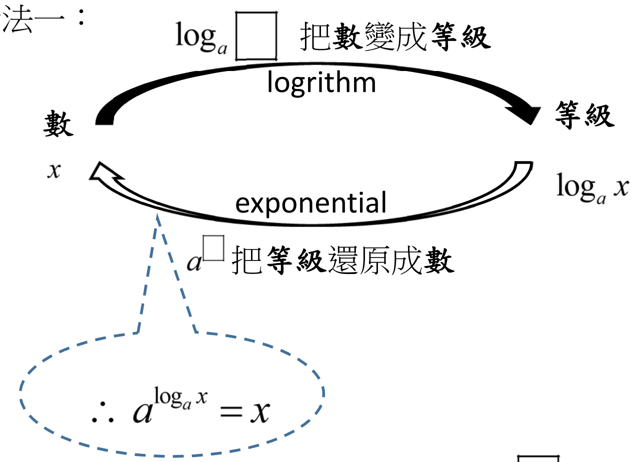
9. 對數函數與指數函數的作用有何不同？ (填入「數」或「等級」)

對數函數 $f(x)=\log_a x$ ➔把______變______；

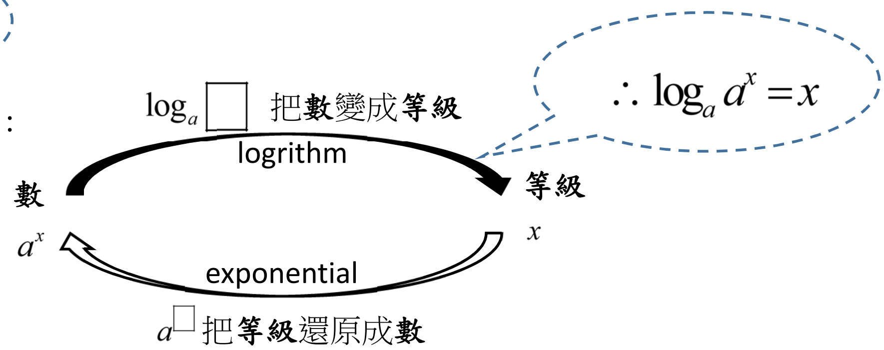
指數函數 $g(x)=a^x$ ➔把______變______

10. 圖解指對數函數之關係：

表示法一：



表示法二：



$\boxed{\text{小結}}$：

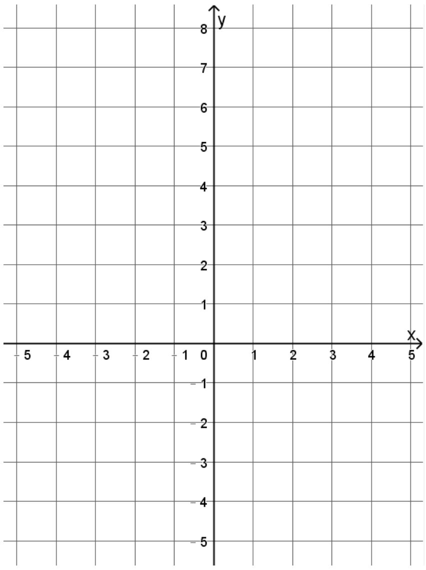
- 像 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$ 這樣「因果互調」的函數，我們稱它們互為『反函數』。
- $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$ 的圖形對稱於 $y=x$ 軸。
- 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互為反函數，我們稱之為 $f^{-1}(x)$，則它們的圖形一定對稱於 $y=x$ 軸。
- 每個函數都會有反函數嗎？______________
- 從函數的定義來思考(不能一對多，可以多對一)，什麼樣的函數才會有反函數？

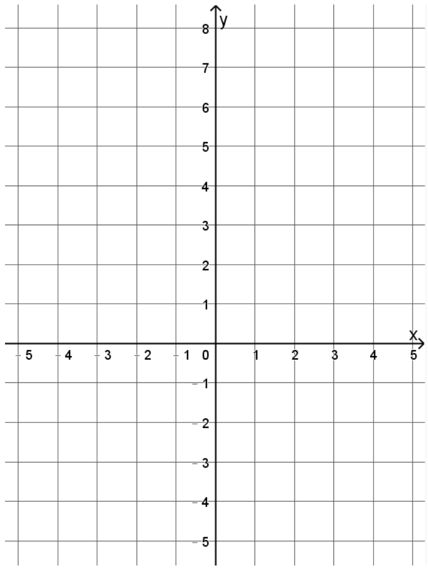
有關反函數的延伸：

11. 若 $x \in R$ ， $g(x)=3x-2$ ，猜猜 $g(x)$ 的反函數 $g^{-1}(x)=$ ______ 。

12. 大約畫出 $f(x)=x^2$ 與 $f(x)=x^3$ 的圖。

然後回答下兩題➜





13. 當 $x \geq 0$ 時， $f(x)=x^2$ ，猜猜 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)=$ ______($x \geq 0$)。

你覺得這句話拿掉可以嗎？____為什麼？______________________________

14. 當 $x \geq 0$ 時， $f(x)=x^3$ ，猜猜 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)=$ ________ 。

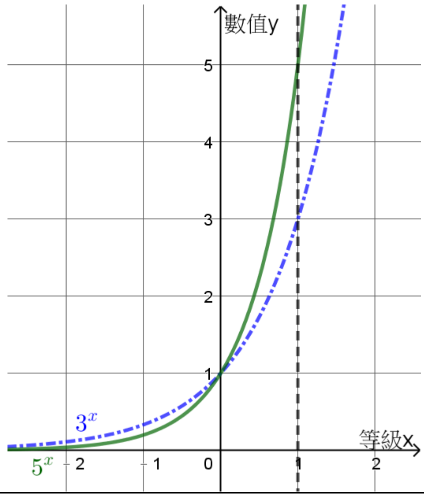
你覺得這句話拿掉可以嗎？____為什麼？______________________________

再探指數函數的圖形

從圖形檢查晉級倍數

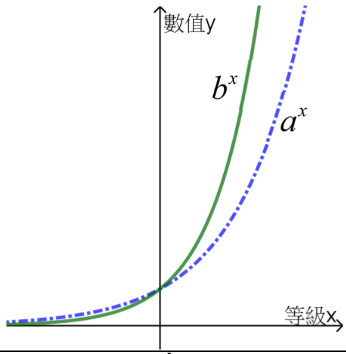
1. 函數 $f(x)=5^x$，當 $x=$_______時，函數值即為此函數的晉級倍數(底數)。
2. 右圖為 3^x、5^x 兩函數的圖。**等級為 1 時**，這兩個函數的值分別即_____、_____。

   我們可利用此性質來**檢查圖形的『晉級倍數**(底數)**』**。



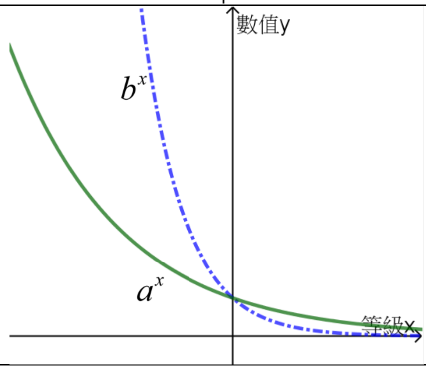
3. 右圖的指數函數圖形，晉級倍數(底數)______1 (填>、=、<)
4. 試試看利用上述方法，比較右圖兩個函數的晉級倍數(即「底」) a、b 的大小。

   ____



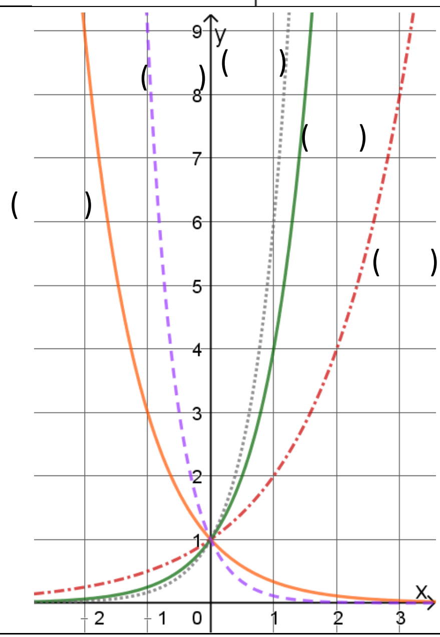
5. 右圖的指數函數圖形，晉級倍數(底數)______1 (填>、=、<)
6. 試試看利用上述方法，比較右圖兩個函數的晉級倍數(底數) a、b 的大小。

   ____



7. 請在圖形旁寫出右方五個指數函數。當晉級倍數(底數)小於 1 時，你是如何判別的?

   ____



指對數函數圖形的對稱性統整

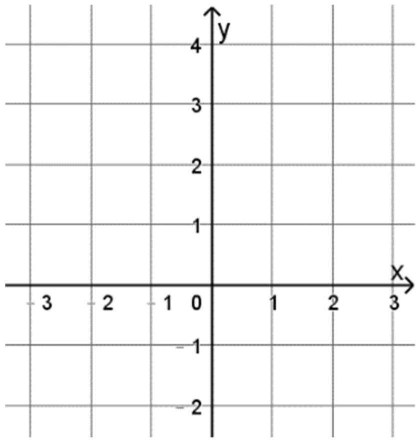
問：$f(x)$ 與 $g(x)=f(-x)$ 的圖形有何關聯?

➔ $g(x)$ 的高度(值)要去 $f(-x)$ 拿。

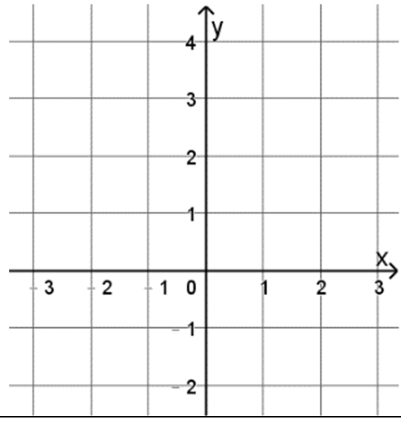
➔ 所以左邊的高度(值)會被拿到右邊，右邊的高度(值)會拿到左邊。

➔ **<u>圖形左右對稱</u>**

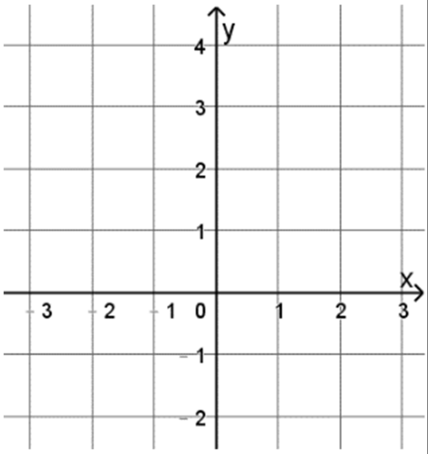
請依序畫出 $f(x)=2x-1$ 與 $f(-x)$ 的圖形。



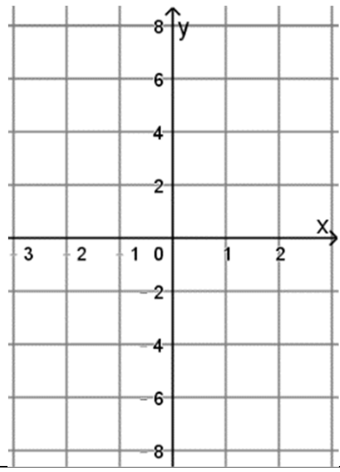
請依序畫出 $f(x)=-(x+1)^2+2$ 與 $f(-x)$ 的圖形。



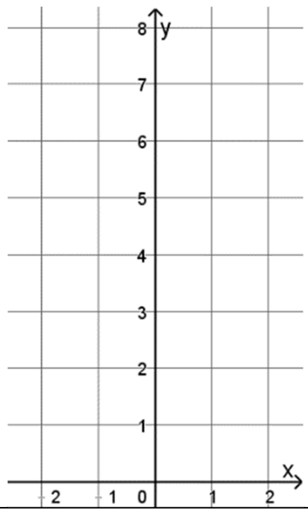
請依序畫出 $f(x)=x^2$ 與 $f(-x)$ 的圖形。



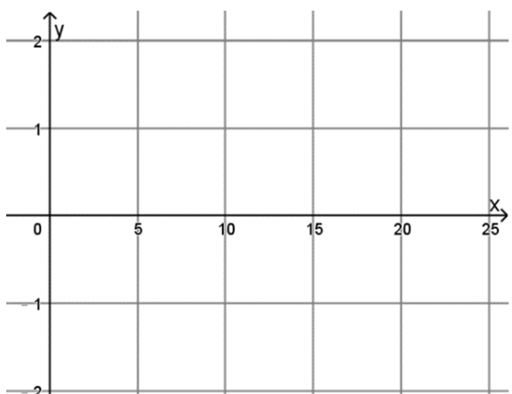
請依序畫出 $f(x)=x^3$ 與 $f(-x)$ 的圖形。



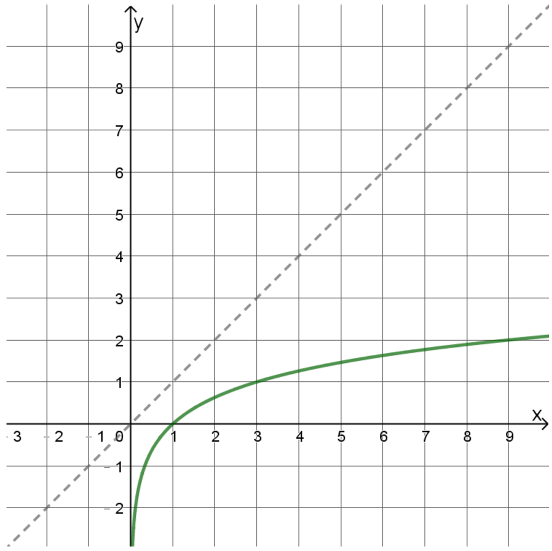
請依序畫出 $f(x)=2^x$ 與 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形。



請依序畫出 $f(x)=\log_5 x$ 與 $g(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$ 的圖形。



右圖的曲線是函數 $f_1(x)$ 的圖形? 則 $f_1(x)=$ ________ ，請在圖形旁寫上。



(1) $f_2(x)=-f(x)=$ __________

$f_3(x)=f^{-1}(x)=$ _________

$f_4(x)=f_3(-x)=$ __________

(2) 利用 $f_1(x)$ 的圖，畫出 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 、 $f_4(x)$ 的圖。

作業：講義
p.129~133

【大考試題賞析】

- 令 $a=2.6^{10}-2.6^{9}$ ，$b=2.6^{11}-2.6^{10}$ ，$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

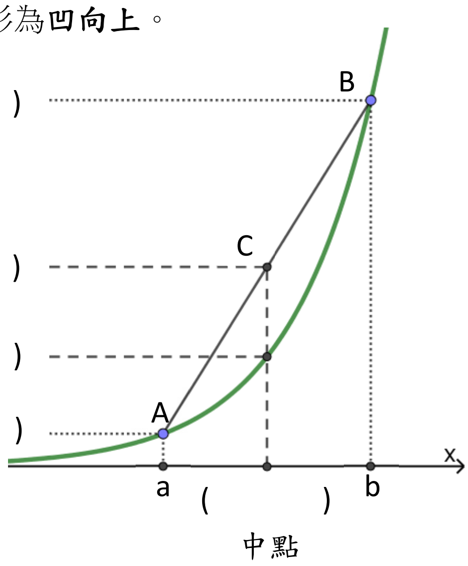
  (1) $a>b>c$ (2) $a>c>b$ (3) $b>a>c$ (4) $b>c>a$ (5) $c>b>a$ 。 【102 學科能力測驗】

指對數圖形的凹向性觀察

我們討論圖形的凹向性。

(1) 函數圖形上**任兩點**連線段都在函數圖形上方時，稱此函數圖形為**凹向上**。

通常最方便檢測的點是中點，檢測方法如下：

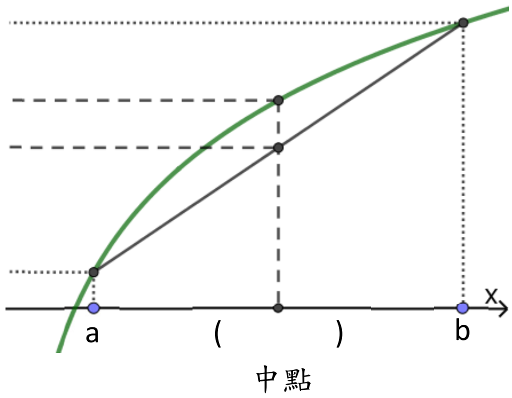


即對任意實數 $a<b$，滿足

$\dfrac{f(a)+f(b)}{2} > f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，我們就稱其為凹向上。

$\boxed{\text{思考}}$：你覺得C是A與B的中點嗎？為什麼?

(2) 函數圖形上**任兩點**連線段都在函數圖形下方時，稱此函數圖形為**凹向下**，如圖 (b)。



即對任意實數 $a<b$，滿足

$\dfrac{f(a)+f(b)}{2} < f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，我們就稱其為凹向下。

作業：講義 **p.161**

【大考試題賞析】

- 坐標平面上，在函數圖形 $y=2^x$ 上，標示 A、B、C、D 四個點，其 x 坐標分別為 -1、0、1、2。請選出正確的選項。

  (1)點 B 落在直線 AC 下方

  (2)在直線 AB、直線 BC、直線 CD 中，以直線 CD 的斜率最大

  (3) A、B、C、D 四個點，以點 B 最靠近 x 軸

  (4)直線 $y=2x$ 與 $y=2^x$ 的圖形有兩個交點

  (5)點 A 與點 C 對稱於 y 軸。　　【104 學科能力測驗】

指數方程式與指數不等式

題型請移至：
講義 p.134~140

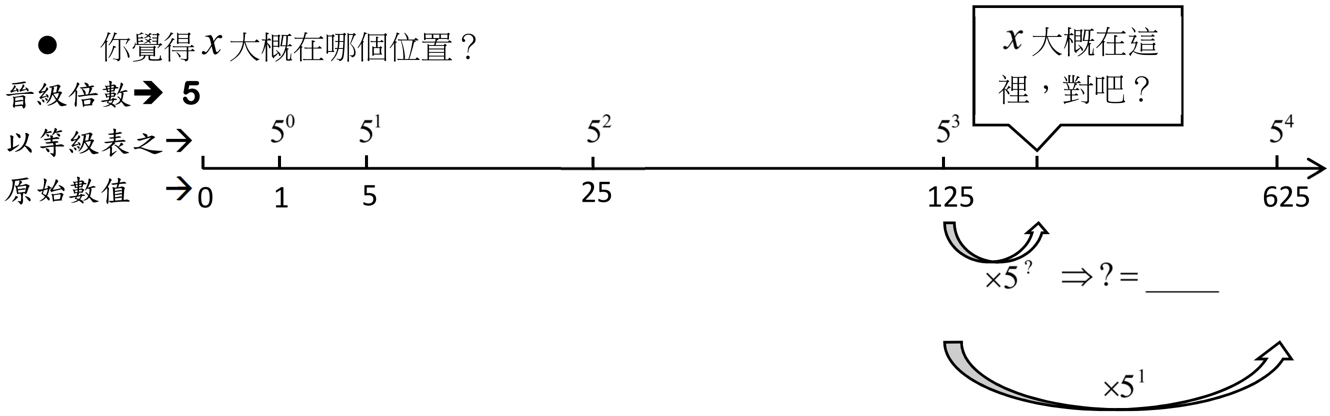
對數方程式與對數不等式

題型請移至：
講義 p.162~166

科學記號與首數、尾數

讓我們重新解構 $x=5^{3.2}$，即 $\log_5 x = 3.2$。究竟 x 是多大？我們在下方數線找找看。

- 你覺得 x 大概在哪個位置？



- $\because x = 5^{3.2} = 5^3 \times 5^{0.2}$，猜猜看 $5^{0.2}$ 大概等於多少？
- $5^{0.2}$ 比 1 大嗎? __________

  思考...... $5^{0.2} \times 5^{0.2} \times 5^{0.2} \times 5^{0.2} \times 5^{0.2} = 5^{\square}$
- 拿出計算器算算看、猜猜看 $5^{0.2}$ 大約是多少?______________
- 因此，$5^{3.2} = 5^{0.2} \times 5^3$

  $\cong$ ____ $\times 5^3$

  你覺得這樣有像『晉級倍數為 5 的科學記號表示法』嗎？
- 我們慣用的科學記號的晉級倍數為 10，其實是**初階版的科學記號**。
- 拿出你的計算器算出等級：$1000 = 2^{\square} = 3^{\square} = 5^{\square} = 10^{\square}$

  例：利用換底公式 $\log_2 1000 = \dfrac{\log \square}{\log \square} \approx$ __________

想想看…

921 大地震，是 1999 年 9 月 21 日上午 1 時 47 分 15.9 秒。震央在約於南投縣集集鎮境內，震源深度 8.0 公里，美國地質調查局測得地震矩規模 7.6~7.7；2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分 18 秒許，宮城縣牡鹿半島東南偏東約 130 公里的西北太平洋海域發生地震矩規模 9.0 的地震，震源深度約 24.4 公里。常見的一種芮氏地震規模 M 與能量 E 關係的等式為：$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$

(1)地震強度 7 和 9 能量的差距，相差多少？

(2)地震強度 7.1 和 7.2 能量的差距，和地震強度 7.6 和 7.7 能量的差距，相同嗎？

回來看看我們熟知的『科學記號』吧!

▲ $a=53280000=5.328\times10^{7}$

a 大概在這裡？

晉級倍數➔ 10

以等級表之→ 10^{0} 10^{7} 10^{8}

原始數值 → 0 1 10000000 100000000

$\times10^{?}\Rightarrow ?=$ ____

$\times10^{1}$

$$\begin{aligned}&53280000\\&=5.328\times10^{7}\\&\cong10^{0.7266}\times10^{7}\\&=10^{7.7266}\end{aligned}$$

尾數

首數

▲ $b=0.00005328=5.328\times10^{-5}$

b 大概在這裡

晉級倍數➔ 10

以等級表之→ 10^{-5} 10^{-4} 10^{-1} 10^{0}

原始數值 → 0 0.00001 0.0001 0.1 1

$\times10^{?}\Rightarrow ?=$ ______

$\times10^{1}$

$$\begin{aligned}&0.00005328\\&=5.328\times10^{-5}\\&\cong10^{0.7266}\times10^{-5}\\&=10^{-5+0.7266}\\&=10^{-4.2734}\end{aligned}$$

尾數

應該是不滿一級的數

範圍：____________

首數

應該要是整數

範圍：____________

那我們又要如何得知 $5.328\cong10^{0.7266}$，只能靠計算器啦！！或者......有現成的表可以查。

作業：講義

p.176~178

- 請仿照上頁，在此頁討論：　7241000　與　0.00000007241

粗估等級

- 請先查表完成右方等級尺。
- 請在以下空格填入適當的數：

$2\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$	$6\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$
$3\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$	$7\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$
$4\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$	$8\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$
$5\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$	$9\times10^5=10^{\square}\times10^5=10^{\square}$

- 完成等級尺

$2=10^{0.301}$

$3=10^{0.4771}$

$4=10^{\square}$

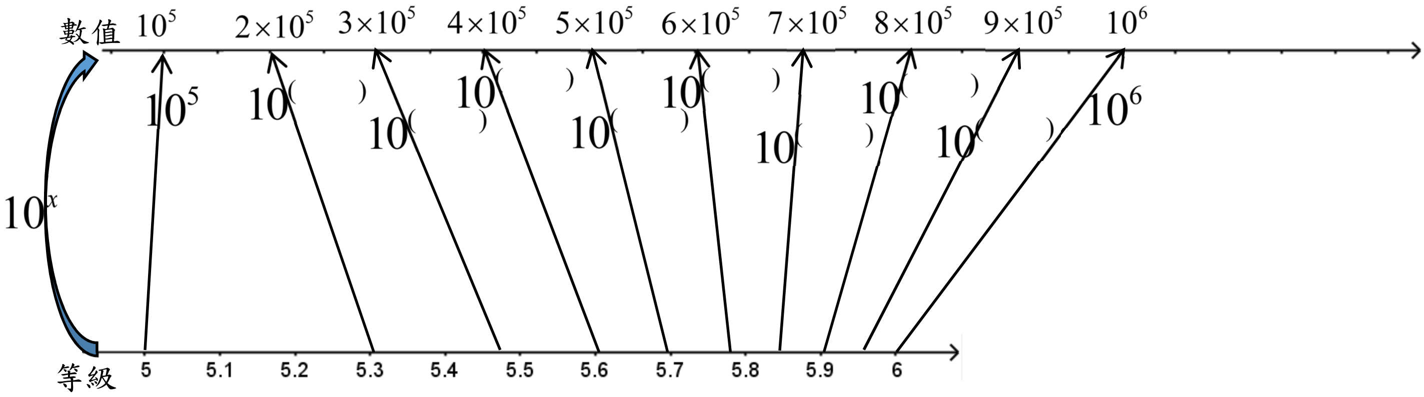
$5=10^{\square}$

$6=10^{\square}$

$7=10^{0.8451}$

$8=10^{\square}$

$9=10^{\square}$



練習：

- (1) 設 $\log x=3.518$，則 x 的整數部分有______位，其最高位數字為_______。
  (2) 設 $\log y=-8.562$，則 y 從小數點後第_______位開始出現不為零的數字，此數字為______。

- (1) log2 = 0.3010，log3 = 0.4771，log7 = 0.8451，則 5^{30} 為______位數，最高位數字為______。
  (2) $(\frac{2}{3})^{25}$ 小數點以下第______位才開始出現不為 0 的數字，第一個不為 0 的數字是______。

- 在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8% 的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？
  (1) 9 千隻　(2) 108 千隻　(3) 2200 千隻　(4) 3200 千隻　(5) 32000 千隻。【99 學科能力測驗】

查表?怎麼查?

回顧我們的需求⋯ 53280000

$$=5.328\times10^{7}$$
$$\cong10^{0.7266}\times10^{7}$$
$$=10^{7.7266}$$

查表，我們需要查的會是：□首數 □尾數，因此，表中的函數值總是落在哪一個範圍？__________

真數 $x=0.01$

常用對數表 $y=\log_{10}x \Rightarrow x=10^{y}$

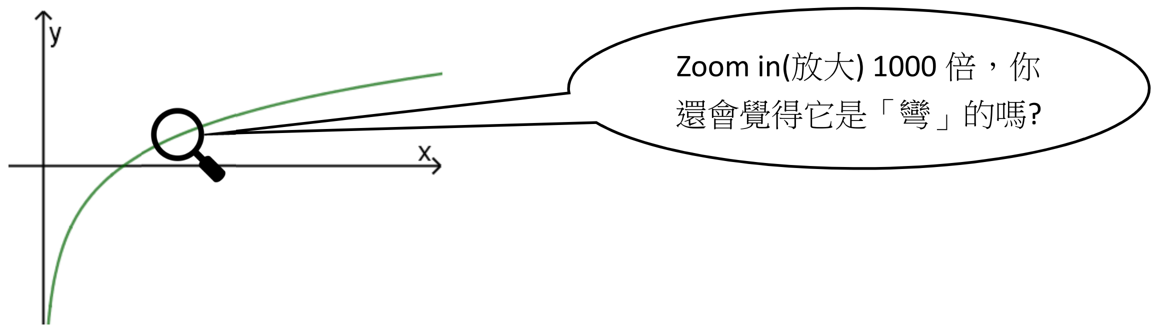
y 小數點後 4

真數 $x=5.0$

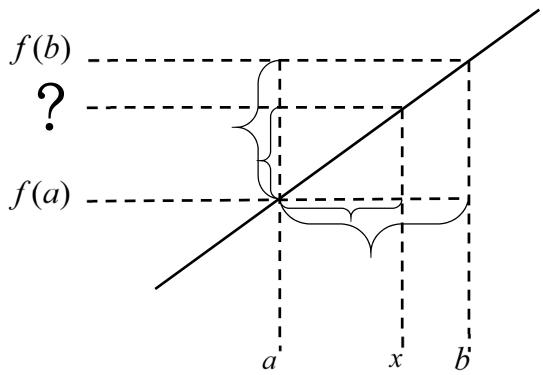
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

作業：講義
p.173~174

內插法的原理➔成正比



所以，如果我們把它當直線來看➔「成正比」的概念！



利用正比的性質，我們可以估計我們想要知道的位置之值。

作業：講義
p.175

科學記號與首尾數學習單

$\log 2.65 = 0.4232$，$\log 3.3 = 0.5185$，$\log 4.4 = 0.6435$，$\log 5.5 = 0.7404$，$\log 6.6 = 0.8195$，完成下方表格。一年____班____號 姓名______________

原始的數	科學記號	以 10 為晉級倍數	拆寫成科學記號的規格	幾位數或小數後幾位始不為 0	首位不為 0 的數字	看等級(首數：大等級，尾數：等級中不滿一等的部分) 等級函數	等級	首數	尾數
2650000									
26500									
265									
2.65	2.65×10^{0}	$10^{0.4232}$	$10^{0.4232}\times10^{0}$			$\log 2.65$			
0.0265									
0.000265									
0.00000265									
6600000									
5500000									
4400000									
3300000									

練習題：

1. 請舉出 3 個與 $\log 58300$ 尾數相同的數。log____________、log____________、log____________
2. 請舉出 3 個與 $\log 58300$ 首數相同的數。log____________、log____________、log____________
3. 請舉出 3 個與 $\log 0.00583$ 尾數相同的數。log____________、log____________、log____________
4. 請舉出 3 個與 $\log 0.00583$ 首數相同的數。log____________、log____________、log____________
5. $10^{45.6789}$ 的首數=____________，尾數=____________，是__________位數，首位數字是____________。($\log 4.774 = 0.6789$)
6. $10^{-12.345}$ 的首數=____________，尾數=____________，小數後___位始不為 0，首位不為 0 的數字是______。($10^{0.345} = 2.2131$，$10^{0.655} = 4.5186$)
7. 科學記號 9.27×10^{7} 的首數=____________，尾數=____________，是__________位數，首位數字是____________。($10^{0.9671} = 9.27$)
8. 科學記號 7.29×10^{-8} 的首數=____________，尾數=____________，小數後___位始不為 0，首位不為 0 的數字是______。($\log 7.29 = 0.8627$)

單利、複利問題

還記得本章節一開始提過的問題嗎？讓我們再看一次。

- 阿銘應徵工作，老闆承諾『月起薪 100000，並且每年加薪 5%』。
  (1) 隔年，老闆給阿銘月薪應為________________。
  (2) 又隔一年(過了兩年)，老闆給阿銘月薪 100000+5000+5000，照這個邏輯的話每年增加的薪水一樣多，你覺得對嗎?__________
  (3) 此時阿銘幫自己爭取月薪應為 100000 +________+________
  (4) 若依老闆原本預計的給薪方法，過了 4 年，阿銘的月薪會是多少?
  請用數學計算式表示：100000 +___________。
  (5) 阿銘替自己爭取到的月薪，每年增加的薪水不一樣多，你覺得阿銘每年的薪水應該是前一年的幾倍才對?______________
  (6) 若依阿銘替自己爭取到的月薪計算方法，過了 4 年，阿銘的月薪會是多少?
  請用數學計算式表示：100000 X ___________。

在阿銘的例子中，老闆給薪的方法，其實就是單利的計算方式。
而阿銘認為合理的給薪方法，就是複利的計算方式。

小結：

1. 單利問題：
設本金為 P，期利率為 $r\%$，期數為 n，若單利計算，則本利和 $S=P\times(1+n\times r\%)$。

2. 複利問題：
設本金為 P，期利率為 $r\%$，期數為 n，若複利計算，則本利和 $S=P\times(1+r\%)^n$。
註：一般銀行的存款或貸款均用複利計算。

【大考試題賞析】

1. 小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率為 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳________元。　【104.學測】

2. 下表為常用對數表 $\log_{10} N$ 的一部分：

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

請問 $10^{3.032}$ 最接近下列哪一個選項？

(1) 101 (2) 201 (3) 1007 (4) 1076 (5) 2012。 【101 學科能力測驗】

3. 某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 75％。公司希望每年依固定的比率（當年和前一年排放量的比）逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少 ＿＿ ％的二氧化碳的排放量。（計算到小數點後第一位，以下四捨五入） 【98.學測】

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863

4. 設 a , b , x 皆為正整數且滿足 $a \le x \le b$ 及 $b-a=3$ 。若用內插法從 $\log a$, $\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$$\log x \approx \frac{1}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b = \frac{1}{3}\left(1+2\log 3-\log 2\right)+\frac{2}{3}\left(4\log 2+\log 3\right) ，$$

則 x 的值為＿＿＿。 【106 學科能力測驗】

數學新世界教師種子生根計畫–重要連結

生根計畫網站

http://tw.newhorizonofmathematics.com

數學新世界 FB 社團

https://www.facebook.com/groups/nhmath

CA 行程表

https://goo.gl/a6YNxW

生根計畫官方 LINE

https://line.me/R/ti/p/%40uje9883i

Tel: 04-7232105 ext.3288
E-mail: nhmath@nhmath.com
Address: 彰化縣彰化市進德路 1 號數學系

重行樸實數學路

發現數學新世界